第 1 章　逻辑和证明

逻辑是研究推理的，它特别着重于推理过程是否正确。它不是研究某个特定的语句是否正确，而是着重于语句之间的关系。例如，考虑下列语句：

所有数学家都穿凉鞋。

任何穿凉鞋的人都是代数学家。

因此，所有的数学家都是代数学家。

从技术上来说，要单独确定这些语句中的某一句是否正确，逻辑并没有用。但是，如果前两个语句为真，逻辑可以肯定第三个语句。

因此，所有的数学家都是代数学家。

也是正确的。

逻辑方法在数学中用于定理证明，在计算机科学中，用来证明程序是在作它应该作的事情。在本章的后面，将讨论一些证明的一般方法，其中之一是数学归纳法，它广泛用于数学和计算机科学中。数学归纳法对离散数学特别有用。

1.1　命题

下面的语句中，哪一个是真的或者假的(但不能二者都是)？

(a)能整除 7 的整数只有 1 和 7 本身。

(b)阿尔弗雷德·希区柯克在 1940 年因指导吕贝卡得到一个奥斯卡学院奖。

(c)对于每一个正整数 n，存在一个大于 n 的素数。

(d)在宇宙中，地球是唯一有生命的星球。

(e)买两张星期五的摇滚音乐会的票。

语句(a)是真的。对于一个大于 1 的整数 n，如果它只能被 1 和 n 本身整除，我们称之为素数。语句(a)是说 7 是素数的另一种方法。

语句(b)是假的。虽然吕贝卡在 1940 年得到奥斯卡最佳图像奖，但约翰·福特因导演“愤怒的葡萄”而得到最佳导演奖。令人惊奇的是，阿尔弗雷德·希区柯克从未得过奥斯卡最佳导演奖。

语句(c)是真的，它是存在无穷素数系列的另一种说法。

语句(d)是真或假之一(但不是既真又假)，但现在没有人知道是哪个。

语句(e)既不是真，也不是假(它是命令语句)。

一个语句，如果它或是真的，或是假的(但不是既真又假)，称为一个**命题**。语句(a)－(d)是命题，而语句(e)则不是。一般来说，命题是一个陈述语句(而不是问题，命令句等)。命题是任何逻辑理论的基本构造模块。

我们将用小写拉丁字母，如 p，q 和 r，来表示命题。我们也要用下面的符号：

p：$1+1=3$

来表示 p 是命题 $1+1=3$。

在日常的语言和文章中，我们用一些连接词如“并且”(and)，“或”(or)等来连接命题。例如，命题“天正在下雨”和“我要拿雨伞”可以合成一个单一的命题“天正在下雨并且我要拿雨伞”。and 和 or 的正式定义如下：

定义 1.1.1

令 p 和 q 是命题。

p 和 q 的合取，表为 $p \wedge q$，就是连接词

p and q.

p 和 q 的析取，表为 $p \vee q$，就是连接词

p *or* q.

把命题合并而得到的命题，如 $p \wedge q$，$p \vee q$，称为**复合命题**。

例 1.1.2

如

p：$1+1=3$，

q：一个世纪是一百年，

则 p 和 q 的合取是

$p \wedge q$：$1+1=3$ 并且一个世纪是一百年。

p 和 q 的析取是

$p \vee q$：$1+1=3$ 或者一个世纪是一百年。 □

析取和合取命题的真值可用**真值表**来表示。一个命题 P 的真值表是，其每个个别的命题 $p_1, p_2, \cdots\cdots p_n$ 取所有可能的值，在每一个组合下列出 P 的真值。用 T 表示真，F 表示假。

定义 1.1.3

复合命题 $p \wedge q$ 的真值由下列的真值表表示：

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

注意在上表中，给出了 p 和 q 的所有可能的 4 种组合。

定义 1.1.3 说明，只当 p 和 q 都为真时，$p \wedge q$ 为真；其他情况下 $p \wedge q$ 都为假。

例 1.1.4

如

p：$1+1=3$，

q:一个世纪是一百年，
则 p 为假，q 为真，其合取

$p \wedge q$:1+1=3 并且一个世纪是一百年

为假。 □

例 1.1.5

如

p:本尼·古德曼录制了古典音乐，

q:巴尔的摩的奥里奥尔家就是圣路易斯的布朗家。

则 p 和 q 都为真。虽然本尼·古德曼最知名的是其爵士乐的录音，但他的确录制了许多古典音乐（如威伯的单簧管协奏曲 1 号和 2 号，和芝加哥管弦乐团）。圣路易斯的布朗家在 1954 年搬到巴尔的摩，并改名为奥里奥尔。其合取

$p \wedge q$:本尼·古德曼录制了古典音乐并且
　　巴尔的摩的奥里奥尔家就是圣路易斯的布朗家

为真。 □

例 1.1.6

如

p:1+1=3，

q:明尼阿波利斯是明尼苏达的首府，

则 p 和 q 皆为假，合取

$p \wedge q$:1+1=3 并且明尼阿波利斯是明尼苏达的首府

为假。 □

定义 1.1.7

复合命题 $p \vee q$ 的真值由下面的真值表定义

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

析取 $p \vee q$ 中的或(or)，其意义是可兼或即 $p \vee q$ 当 p 或 q 之一为真或二者皆为真时，其值为真，仅当 p，q 皆为假时才为假。还有一个不可兼或（见习题 31），也称异或，exor，xor。当 p 或 q 之一为真（不是 p，q 皆为真）时，p exor q 为真。

例 1.1.8

如

p:1+1=3,

q:一个世纪是一百年,

则 p 为假,q 为真,其析取

$p \vee q$:1+1=3 或者一个世纪是一百年

为真。 □

例 1.1.9

如

p:本尼·古德曼录制了古典音乐,

q:巴尔的摩的奥里奥尔家就是圣路易斯的布朗家。

则 p 和 q 皆为真,其析取

$p \vee q$:本尼·古德曼录制了古典音乐或者
巴尔的摩的奥里奥尔家就是圣路易斯的布朗家

也为真。 □

例 1.1.10

如

p:1+1=3,

q:明尼阿波利斯是明尼苏达的首府,

则 p 和 q 皆为假,析取

$p \vee q$:1+1=3 或者明尼阿波利斯是明尼苏达的首府

为假。 □

本节中讨论的对命题 p 的最后一个操作是 p 的**否定**。

定义 1.1.11

p 的否定,表为 $\overline{p}$,是命题

not p.

其真值表如下

p	$\overline{p}$
T	F
F	T

例 1.1.12

如

p:加里·格兰特在"后窗"中扮演了角色,

则 p 的否定是命题

$\overline{p}$:说加里·格兰特在"后窗"中扮演了角色是不对的。

因为 p 为假,$\overline{p}$ 为真。(詹姆士·斯图尔特是"后窗"的男主角)p 的否定一般写为:

加里·格兰特在“后窗”中没有扮演角色 □

例 1.1.13

令

p:布莱斯·帕斯卡发明了一些计算机器，

q:第一个全电子数字计算机是在 20 世纪建造的，

r:π 在 1954 年已计算到十进制一百万位。

用符号形式表述下面的命题，并确定其为真或假。

或者布莱斯·帕斯卡发明了一些计算机器并且
第一个全电子数字计算机不是在 20 世纪建造的，
或者 π 在 1954 年已计算到十进制一百万位。

上述命题可用符号形式表示如下：

$$(p \wedge \overline{q}) \vee r$$

我们首先注意 p and q 为真，且 r 为假（π 在 1973 年才计算到十进制一百万位，此后已计算到超过二十亿位）。如果我们把每个符号用其真值代替，可得

$$\begin{aligned}(p \wedge \overline{q}) \vee r &= (\mathrm{T} \wedge \overline{\mathrm{T}}) \vee \mathrm{F} \\ &= (\mathrm{T} \wedge \mathrm{F}) \vee \mathrm{F} \\ &= \mathrm{F} \vee \mathrm{F} \\ &= \mathrm{F}\end{aligned}$$

因此，上述命题为假。 □

习 题

确定习题 1－8 中的语句是否命题。如语句是命题，写出其否定（此处并未问是命题的语句是否为真）。

*1. $2+5=19$

2. 侍者，上干果——我的意思是，给客人上干果。

3. 对于某个正整数 n，$19340 = n \cdot 17$。

*4. 奥德雷·米度斯是“度蜜月的人们”中爱丽斯的原型。

5. 给我剥葡萄皮。

6. 台词“再演奏一次，山姆”出现在“卡萨布兰卡”中。

*7. 每个大于 4 的偶数是两个素数的和。

8. 两个素数的差。

对于习题 9－14 中的命题，求其真值。$p = \mathrm{F}, q = \mathrm{T}, r = \mathrm{F}$.

*9. $p \vee q$

10. $\overline{p} \vee \overline{q}$

11. $\overline{p} \vee q$

*12. $\overline{p} \vee \overline{(q \wedge r)}$

13. $\overline{(p \vee q)} \vee (\overline{p} \vee r)$

14. $(p \vee \bar{r}) \wedge \overline{(q \vee r) \vee \overline{(r \vee p)}}$

对习题 15 - 22 中的每个命题,写出其真值表。

*15. $p \vee \bar{q}$

16. $(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee p$

17. $(p \vee q) \wedge \bar{p}$

*18. $(p \wedge q) \wedge \bar{p}$

19. $(p \wedge q) \wedge (\bar{p} \vee p)$

20. $\overline{(p \wedge q)} \vee (r \wedge \bar{p})$

*21. $(p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$

22. $\overline{(p \wedge q)} \vee (\bar{q} \vee r)$

在习题 23 - 25 中,把给出的陈述用符号形式表示。令

$p:5<9$, $q:9<7$, $r:5<7$

确定每一个语句是真是假。

*23. 5<9 并且 9<7。

24. 并非(5<9 且 9<7)。

25. 5<9 或者(9<7 且 5<7)不对。

在习题 26 - 30 中,将符号表示写成文字形式。使用

p:**今天是星期一,**

q:**天正在下雨,**

r:**天气热。**

*26. $p \vee q$

27. $\bar{p} \wedge (q \vee r)$

28. $\overline{p \vee q} \wedge r$

*29. $(p \wedge q) \wedge \overline{(r \vee p)}$

30. $(p \wedge (q \vee r)) \wedge (r \vee (q \vee p))$

31. 对于 p 和 q 的不可兼或 p exor q,写出其真值表。它当 p 或 q 之一为真时,其值为真;但 p,q 都为真时其值为假。

*32. 有一段时间,下列法令在伊利诺州的纳帕维尔是有效的:“任何人,如在城市内,其财产中保有多于三只猫和三条狗是非法的”。查尔斯·马尔科有五条狗但没有猫,和此法令抵触吗? 解释之。

注:用 * 号标明的习题,在本书的后面有其解法的提示。

1.2 条件命题和逻辑等价

系主任曾宣称:

如果数学系得到额外的 2 万元,它就要再聘用一个教员。 (1.2.1)

语句(1.2.1)说,在数学系得到额外 2 万元的条件下,它就要再聘用一个教员。像语句(1.2.1)这样的命题称为**条件命题**。

定义 1.2.1

如 p 和 q 都是命题,复合命题

如 p 则 q

称为条件命题,并表为

$$p \to q \tag{1.2.2}$$

命题 p 称为假设(或前件),命题 q 称为结论(或后件)。

例 1.2.2

如果我们定义

p:数学系得到额外2万元,

q:数学系再聘用一个新教员,

则语句(1.2.1)就是式(1.2.2)的形式。假设是"数学系得到额外2万元",结论是"数学系再聘用一个新教员"。

一些语句不是式(1.2.2)的形式,可以重组表为条件语句,如下例所示。 □

例 1.2.3

把每个命题表述为式(1.2.2)条件命题的形式。

(a)玛丽将是一个好的大学生,如果她努力学习的话。

(b)约翰可以选微积分,仅当他有大学二,三或四年级学生的身份。

(c)当你唱时,我的耳朵受损。

(d)Cubs 队要赢得总决赛,必要条件是他们必须签约一个右手的后备投手。

(e)拉尔夫访问加利福尼亚的一个必要条件是他去迪斯尼乐园。

(a)假设是"如果"后面的语句;所以一个等价的表述是

如果玛丽努力学习,她将是一个好的大学生。

(b)仅当语句是结论,即是

如 p 则 q

逻辑上和下面的形式一样

p 仅当 q。

因此,(b)的等价的表述为

如果约翰可以选微积分,那么他有大学二,三或四年级学生的身份。

(c)当和如果的作用相同,所以其等价表述为

如果你唱,那么我的耳朵受损。

(d)结论表示一个**必要条件**,所以一个等价的表述是

如果 Cabs 队赢了总决赛,那么他们签约了一个右手的后备投手。

(e)结论表示一个**充分条件**,所以一个等价的表述是

如果拉尔夫去迪斯尼乐园,那么他访问加利福尼亚。 □

考虑给系主任命题一个真值

如果数学系得到额外的 2 万元，它就要再聘用一个新教员。

此陈述只当假设“如果数学系得到额外的 2 万元”为真时，才会令人感兴趣。如它为真，就是如果数学系得到了额外的 2 万元，要是数学系再聘用一个新教员也为真，我们就认为系主任的言论为真。另一方面，如数学系得到额外的 2 万元为真，但数学系再聘用一个新教员为假，我们就认为系主任的言论为假。当假设为真，条件命题作为一个整体，其真值取决于结论的真值。一般来说，如假设 p 为真，条件命题 $p \to q$ 取决于 q，如 q 为真即为真；如 q 为假则为假。如假设 p 为假，直觉上可以知道的是，条件语句 $p \to q$ 的真值将不依赖于结论的真值。简单地由于数学系没有得到额外的 2 万元，我们将不会认为系主任的言论为假。无论如何，条件命题像其他命题一样，必须有真假值，即使前提为假也一样。根据标准的定义，当前提 p 为假时，$p \to q$ 为真。上面的讨论可以归结在下面的定义中。

定义　1.2.4

条件命题的真值由下面的真值表定义：

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

例　1.2.5

令

$p: 1 > 2$　　　　$q: 4 < 8$

则 p 为假而 q 为真，因此

$p \to q$ 为真，　　$q \to p$ 为假。 □

例　1.2.6

设 p 为真，q 为假，r 为真，求下面各命题的真假值。

(a) $(p \wedge q) \to r$

(b) $(p \vee q) \to \overline{r}$

(c) $p \wedge (q \to r)$

(d) $p \to (q \to r)$

我们把符号 p, q, r 用其真值代替，得出各命题的真值。

(a) $(T \wedge F) \to T = F \to T =$ 真

(b) $(T \vee F) \to \overline{T} = T \to F =$ 假

(c) $T \wedge (F \to T) = T \wedge T =$ 真

(d) $T \to (F \to T) = T \to T =$ 真 □

在日常的语言中，条件命题的假设和结论一般是有关的，但在逻辑中，条件命题的假设和结论并不需要和同一个主题有关。例如在逻辑中，我们允许下面的命题：

如果 $5<3$,则尼尔森·洛克菲勒是美国总统。

逻辑只关心命题的形式和命题之间的相互关系,而不是主题本身(事实上,由于前提为假,上面的命题为真。注意一个真的条件命题和一个结论为真的条件命题是不同的)。

例 1.2.5 示出,当 $q\rightarrow p$ 为假时,条件命题 $p\rightarrow q$ 可以为真。我们把命题 $q\rightarrow p$ 称为命题 $p\rightarrow q$ 的**逆命题**(**逆换式**)。因此,即使其逆命题为假,一个条件命题也可以为真。

例 1.2.7

将各条件命题符号化。用符号形式和语句形式写出其逆命题。并求出各条件命题和其逆命题的真值。

(a)如 $1<2$,则 $3<6$。

(b)如 $1>2$,则 $3<6$。

(a)令

$p:1<2,\qquad q:3<6.$

则语句可写为符号形式如

$p\rightarrow q$

由于 p ,q 都为真,语句为真。其逆可写为符号形式如

$q\rightarrow p$

用语句表示为:

如 $3<6$,则 $1<2$。

由于 p 和 q 都为真,逆命题 $q\rightarrow p$ 为真。

(b)令

$p:1>2\qquad q:3<6$

则语句可写为符号形式如

$p\rightarrow q$

由于 p 为假,q 为真,语句为真。其逆可写为符号形式如

$q\rightarrow p$

用语句表示为:

如 $3<6$,则 $1>2$。

由于 q 为真,p 为假,逆命题 $q\rightarrow p$ 为假。 □

另一个有用的复合命题是

p 当且仅当 q。

这个命题为真的条件是 p 和 q 有同样的真值(即 p,q 都为真或 p,q 都为假)。

定义 1.2.8

如 p 和 q 是命题,复合命题

$$p \text{ 当且仅当 } q \tag{1.2.3}$$

称为双条件命题,且表为

$q\leftrightarrow p$

此命题的真值由下面的真值表定义:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

另一种表示“p 当且仅当 q”的方式是“p 是 q 的充要条件”。“p 当且仅当 q”有时写为“p iff q”。



例 1.2.9

语句

$$1 < 5 \text{ 当且仅当 } 2 < 8 \tag{1.2.4}$$

如令

$p: 1 < 5 \qquad q: 2 < 8$

可用符号表示为

$p \leftrightarrow q$

由于 p 和 q 都为真，该语句为真。

□

语句(1.2.4)的另一种说法是“$1 < 5$ 的充要条件是 $2 < 8$”。

有时，两个不同的复合命题不管其组成的命题取什么值，其真值总是相同的。这样的命题称为**逻辑等价**。

定义 1.2.10

设复合命题 P 和 Q 是由 $p_1 \cdots\cdots p_n$ 组成，如果不管 $p_1 \cdots\cdots p_n$ 取什么值，P 和 Q 总是同时为真或同时为假，我们就说 P 和 Q 逻辑上是等价的，表为

$P \equiv Q$

例 1.2.11 逻辑的德·摩根定律

我们来验证**德·摩根第一定律**

$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$，

$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$

把第二定律作为习题(见习题 44)。

我们令

$P = \overline{p \vee q} \qquad\qquad Q = \overline{p} \wedge \overline{q}$

写出 P, Q 的真值表，可以证实，不管 p, q 取什么值，P 和 Q 总是同时为真或同时为假：因此 P 和 Q 是逻辑等价的。 □

我们的下一个例给出 $p \to q$ 的否定的逻辑等价式。

p	q	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

例 1.2.12

证明 $p \to q$ 的否定和 $p \wedge \bar{q}$ 是逻辑等价的。

我们要证明

$$\overline{p \to q} \equiv p \wedge \bar{q}$$

写出

$P = \overline{p \to q}$，$Q = p \wedge \bar{q}$

的真值表，我们可用证实，不管 p, q 取什么值，P 和 Q 总是同时为真或同时为假：所以 P 和 Q 是逻辑等价的。 □

p	q	$\overline{p \to q}$	$p \wedge \bar{q}$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	F	F

下面我们证明，根据我们的定义，$p \leftrightarrow q$ 和 $p \to q$ and $q \to p$ 是逻辑等价的。

例 1.2.13

真值表示出 $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \to q) \wedge (p \to q)$。

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

□

我们给出一个条件命题的逆反式作为本节的结束。我们将看到(定理 1.2.16)，一个条件命题的逆反式是和该命题等价的另一种写法。习题 45 还给出条件命题的另一种等价形式。

定义 1.2.14

一个条件命题 $p \to q$ 的逆反式(或转置)是命题 $\overline{q} \to \overline{p}$。

注意逆反式和逆命题的不同。一个条件命题的逆命题(逆换式)是把条件命题的 p 和 q 的作用互换,逆反式不但把 p 和 q 的作用互换,还要把它们都进行否定。

例 1.2.15

把命题

如果 $1<4$,则 $5>8$

写为符号形式。用符号形式和语句形式写出其逆命题和逆反式,并求各命题的真假值。

我们定义

$p:1<4,\qquad q:5>8.$

则给出的命题可写为

$p \to q$

其逆命题是

$q \to p$

或表为语句

如果 $5>8$,则 $1<4$.

逆反式为

$\overline{q} \to \overline{p}$。

或表为语句

如果 5 不大于 8,则 1 不小于 4。

我们看到 $p \to q$ 为假,$q \to p$ 为真,而 $\overline{q} \to \overline{p}$。为假。 □

一个重要的事实是一个条件命题和其逆反式是逻辑等价的。

定理 1.2.16

条件命题 $p \to q$ 和其逆反式 $\overline{q} \to \overline{p}$ 是逻辑等价的。

证明:写出真值表

p	q	$p \to q$	$\overline{q} \to \overline{p}$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

由此示出 $p \to q$ 和 $\overline{q} \to \overline{p}$ 是逻辑等价的。 ■

习 题

对于习题 1-7,把条件命题重新表述为语句(1.2.2)的形式。

*1. 乔依将通过离散数学的考试,如果他努力学习的话。

2. 罗莎可以毕业,如果她有 160 个学分。

3. 费尔南多要买计算机的充分条件是他有 2000 美元。

*4. 卡特琳娜选算法课的充分条件是她通过了离散数学课的考试。

5. 当更好的车被造出,别克将要造出它们。

6. 听众将会睡着,如果主席讲演的话。

*7. 程序是可读的,仅当它具有好的结构。

*8. 写出习题 1 - 7 的命题的逆命题。

9. 写出习题 1 - 7 的命题的逆反式。

设 p and r 为假,q and s 为真,求出习题 10 - 17 的命题的真假值。

*10. $p \to q$

11. $\overline{p} \to \overline{q}$

12. $\overline{p \to q}$

*13. $(p \to q) \land (q \to r)$

14. $(p \to q) \to r$

15. $p \to (q \to r)$

*16. $s \to (p \land \overline{r})) \land ((p \to (r \lor q)) \land s)$

17. $((p \land \overline{q} \to (q \land r) \to (s \lor \overline{q})$

在习题 18 - 21 中,令

p:4<2,　　q:7<10,　　r:6<6.

写出各命题的符号形式。

*18. 如果 4<2,则 7<10。

19. 如果(4<2 and 6<6),则 7<10。

20. 如果并非(6<6 并且 7 不小于 10),则 6<6。

*21. 7 <10 当且仅当(4<2 并且 6 不小于 6)。

在习题 22 - 27 中,用

p:今天是星期一,

q:天正在下雨,

r:天气热。

把符号形式的命题写为语句。

*22. $p \to q$

23. $\overline{q} \to (r \land p)$

24. $\overline{p} \to (q \lor r)$

*25. $\overline{p \lor q} \leftrightarrow r$

26. $(p \land (q \lor r)) \to (r \lor (q \lor p))$

27. $(p \lor (\overline{p} \land (\overline{q \lor r}))) \to (p \lor (\overline{r \lor q}))$

在习题 28 - 31 中,将各命题写为符号形式。并用符号形式和语句形式写出其逆换式和逆反式,并求出各个命题,其逆换式,逆反式的真假值。

*28. 如 4<6,则 9>12。

29. 如 $4>6$,则 $9>12$。

30. $|1|<3$ 如果 $-3<1<3$。

*31. $|4|<3$ 如果 $-3<4<3$。

对于习题 32 – 41 中的每对命题 P 和 Q,指出它们是否逻辑等价。

*32. $P=p$, $Q=p\vee q$

33. $P=p\wedge q, Q=\overline{p}\vee\overline{q}$

34. $P=p\rightarrow q, Q=\overline{p}\vee q$

*35. $P=p\wedge(\overline{q}\vee r), Q=p\vee(q\wedge\overline{r})$

36. $P=p\wedge(q\vee r), Q=(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

37. $P=p\rightarrow q, Q=\overline{q}\rightarrow\overline{p}$

*38. $P=p\rightarrow q, Q=p\leftrightarrow q$

39. $P=(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r), Q=p\rightarrow r$

40. $P=(p\rightarrow q)\rightarrow r. Q=p\rightarrow(q\rightarrow r)$

*41. $P=(s\rightarrow(p\wedge\overline{r}))\wedge((p\rightarrow(r\vee q))\wedge s), Q=p\vee r$

*42. 对于 impl 定义真值表如下

p	q	p impl q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

证明 p impl $q \equiv q$ impl p。

43. 对于 imp2 定义真值表如下

p	q	p imp2 q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	F

(a)证明:

$$(p \text{ imp2 } q)\wedge(q \text{ imp2 } p)\not\equiv p\leftrightarrow q \qquad (1.2.5)$$

(b)如果我们改变 imp2,使得如 p 为假且 q 时, p imp2 q 为假,则式(1.2.5)式仍为真。

44. 证明德·摩根第二定律 $\overline{p\wedge q}\equiv\overline{p}\vee\overline{q}$。

*45. 证明 $(p\rightarrow q)\equiv(\overline{p}\vee q)$。

1.3 量词

1.1 和 1.2 节中的逻辑是处理命题的，它不能描述数学和计算机科学中大多数陈述。

例如，考虑下面的语句：

p：n 是一个奇数。 (1.3.1)

一个命题是一个有确定的真假值的语句。上面的 p 不是一个命题，因为 p 的真假值取决于 n 的值。例如当 $n=103$ 时 p 为真，而 $n=8$ 时 p 为假。因为数学和计算机科学中的大多数语句使用变量，我们必须扩展逻辑系统以包括这样的语句。

定义 1.3.1

令 $P(x)$为包括变量 x 的语句，令 D 是一个集合。如果对于 D 中的每一个 x，$P(x)$是一个命题，我们称 P 是一个命题函数(对于 D)，而称 D 是P 的个体域(定义域)。

例 1.3.2

令 $P(n)$代表语句

$P(n)$：n 是一个奇数。

并令 D 是正整数集合。则对于个体域 D，P 是一个命题函数，因为对于 D 中的每一个 n，$P(n)$是一个命题(即对于 D 中的每一个 n，$P(n)$为真或假，而不是二者都是)。例如，当 $n=1$，我们得到命题

1 是一个奇数

(值为真)，而当 $n=2$，得到命题

2 是一个奇数

其值为假。 □

一个命题函数 p，其本身既不为真，也不为假。然而，对于个体域中的每个 x，$p(x)$是一个命题，即取真或假值。我们可以把命题函数想象为定义了一系列命题，每个命题对应于个体域中的一个元素。例如，如 P 是一个命题函数，其个体域是正整数集合，我们得到一系列命题

$$P(1),P(2)\cdots\cdots$$

$P(1)$，$P(2)$……的每一个都有确定的真假值。

例 1.3.3

下面所述的都是命题函数。

(a) n^2+2n 是奇数(个体域是正整数集合)。

(b) $x^2-x-6=0$(个体域是实数集合)。

(c)在 1974 年，该棒球运动员的安打率超过 0.300(个体域是棒环运动员的集合)。

(d)饭店在芝加哥杂志上列为二星级(个体域是在芝加哥杂志上列出星级的饭店)。

在语句(a)中，对于每一个正整数 n，我们得到一个命题。因此，语句(a)是一个命题函数。

相似地。对于每一个实数 x，语句(b)成为一个命题；因此语句(b)成为一个命题；因此

语句(b)是一个命题函数。

在语句(c)中,我们可以把变量看成是“棒球运动员”,当把“棒球运动员”用一个特定的棒球运动员来代入时,该语句成为一个命题。例如,把“棒球运动员”用“威利·斯塔格尔”代入,语句(c)成为

威利·斯塔格尔的安打率超过0.300。

其值为真。如果把“棒球运动员”用“卡尔顿·费斯克”代入,语句(c)成为

卡尔顿·费斯克的安打率超过0.300。

其值为假。于是语句(c)是命题函数。

语句(d)的形式和(c)相似:此处变量是“饭店”。当我们把“饭店”用一个在芝加哥杂志上列出星级的饭店代入,语句就成为一个命题。例如,用“雨果饭店”代入,语句(d)成为

雨果饭店在芝加哥杂志上列为二星级

其值为假。如果用法兰西饭店代入,语句(d)成为

法兰西饭店在芝加哥杂志上列为二星级

则为真。于是语句(d)是命题函数。 □

数学和计算机科学中常常使用“所有”(“对于每一个”)和“有些”(“存在一些”)来进行叙述。例如,数学中有定理:

所有的三角形 T,其各角之和等于180度。

计算机科学中,有定理:

有些程序 P,其输出是 P 本身。

现在,我们把1.1和1.2节中的逻辑系统扩展,使之能够处理包括“所有”,“有些”的语句。

定义 1.3.4

令 P 是个体域为 D 的命题函数,语句

所有 $x, P(x)$

称为全称量词的语句。用符号 $\forall$ 表示“所有”或“对于每一个”。于是语句

所有 $x, P(x)$

可以写为

$\forall x, P(x)$

符号 $\forall$ 称为全称量词。

如果对于 D 中所有的 x, $P(x)$ 都为真,语句

所有 $x, P(x)$

为真。而如果 D 中至少有一个 x 使 $P(x)$ 为假,则该语句为假。

语句

对于有些 $x, P(x)$(或存在 $x, P(x)$)

称为存在量词的语句。用符号 $\exists$ 表示“有些”或“存在”。于是语句

存在 $x, P(x)$

可以写为

$\exists x, P(x)$

符号 $\exists$ 称为存在量词。

如果 D 中至少有一个 x，使 $P(x)$ 为真，语句

存在 $x, P(x)$

为真。而如果 D 中所有的 x 都使 $P(x)$ 为假，则该语句为假。

我们把命题函数 $P(x)$ 中的变量 x 称为一个自由变量（其意义是 x 可以在个体域中自由取值）。而把全称量词语句或存在量词语句

$$\forall x, P(x) \tag{1.3.2}$$

$$\exists x, P(x) \tag{1.3.3}$$

中的 x 称为约束变量（其意义是 x 被前面的量词所"约束"）。前面我们指出，一个命题函数没有确定的真假值。另一方面，定义 1.3.4 给被量词约束的语句(1.3.2)和(1.3.3)以确定的真假值。总起来可以说，有自由变量（未被量词约束的变量）的语句不是命题，而没有自由变量的语句是一个命题。

语句

所有 $x, P(x)$

也可表为

对于每一个 $x, P(x)$ 或对于任何 $x, P(x)$

符号 $\forall$ 可以读为"所有的"，"对于每一个"，"对于任何"。

语句

有些 $x, P(x)$

也可表为

对于至少一个 $x, P(x)$ 或存在 x，使得 $P(x)$

符号 $\exists$ 可以读为"有些"，"对于至少一个"，"存在"。

有时，为了规定个体域 D，我们把全称量词语句写为

对于 D 中的每个 $x, P(x)$

而把存在量词语句写为

对于 D 中的某些 $x, P(x)$。

例 1.3.5

语句

对于每个实数 $x, x^2 \geq 0$

是一个全称量词语句。个体域是实数集合。该语句为真，因为对于每一个实数 x，x 的平方都大于或等于 0。 □

例 1.3.6

全称量词语句

对于每一个实数 x，如 $x > 1$，则 $x + 1 > 1$

为真。此时我们必须证明，对于每个实数 x，语句

如 $x > 1$，则 $x + 1 > 1$

为真。

令 x 为任一实数，我们知道，对于任何实数，或者 $x \leq 1$，或者 $x > 1$。当 $x \leq 1$，因为前提

$x>1$ 为假，条件命题

如 $x>1$，则 $x+1>1$

为真（前面说过，如前提为假，不管结论为什么值，条件命题恒为真）。

现在设 $x>1$，不管 x 是什么值，$x+1>x$。由于

$x+1>x$ 和 $x>1$

可得出 $x+1>1$。于是结论为真。当 $x>1$，前提和结论都为真，因此条件命题

如 $x>1$，则 $x+1>1$

为真。

我们已得出，对于任何实数 x，命题

如 $x>1$，则 $x+1>1$

为真。因此，全称量词语句

对于每一个实数 x，如 $x>1$，则 $x+1>1$

为真。 □

例 1.3.6 给出了更多的原因，说明对于条件命题 $p \to q$，当 p 为假时，为何要定其值为真。对于全称量词语句

对于每一个实数 x，如 $x>1$，则 $x+1>1$

要取真值时，不管 x 取什么值，条件命题

如 $x>1$，则 $x+1>1$

都要为真。特别是，当 $x>1$ 为假时，它也必须为真。

根据定义 1.3.4，全称量词语句

对于每一个 x，$p(x)$

如个体域中至少有一个 x 使 $p(x)$ 为假，则该语句为假。个体域中能使 $p(x)$ 为假的 x，值，称为语句

对于每一个 x，$p(x)$

的反例。

例 1.3.7

全称量词语句

对于所有的实数 x，$x^2-1>0$

为假。因为，如 $x=1$，命题

$1^2-1>0$

为假。值 1 是语句

对于所有的实数 x，$x^2-1>0$

的反例。 □

要证明全称量词语句

对于所有的 x，$p(x)$

为假，找出一个个体域中的 x 值令 $p(x)$ 为假就够了。证明该语句为假的方法和一般证明一个语句为真的方法是大不相同的。为了证明其为真，我们必须证明对个体域中的每一个 x 值，$p(x)$ 都为真。

例 1.3.8

全称量词语句

对于每一个正整数 n,如 n 是偶数,则 n^2+n+19 是素数。

为假;可以令 n 等于 38,就得出一个反例。因为此时,$n=38$,条件命题

如果 38 是偶数,则 $38^2+38+19$ 是素数

的前提

38 是偶数

为真,而

$38^2+38+19=38*38+38+19=19(2*38+2+1)=19*79$

可知其结论

$38^2+38+19$ 是素数

为假,因为条件命题为假。 □

我们下面转到存在量词语句。根据定义 1.3.4,存在量词语句

对于 D 中的某些 x, $P(x)$

如果在 D 中至少有一个 x 值使 $P(x)$ 为真,则该语句为真。如果 $P(x)$ 对于某些 x 为真,肯定 $P(x)$ 可能对于某些其他的 x 值为假。

例 1.3.9

存在量词语句

对于某些实数 x, $\frac{x}{x^2+1}=\frac{2}{5}$

为真,因为可以找出至少一个实数 x 使命题

$$\frac{x}{x^2+1}=\frac{2}{5}$$

为真。例如,如 $x=2$,我们得到真命题

$$\frac{2}{2^2+1}=\frac{2}{5}$$

并非每个 x 值都能得到一个真的命题。例如

$$\frac{1}{1^2+1}=\frac{2}{5}$$ □

为假。

例 1.3.10

存在量词语句

对于某些正整数 n,如 n 是素数,则 $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ 都不是素数。

为真,因为我们至少能找出一个正整数 n 使条件命题

如 n 是素数,则 $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ 都不是素数

为真。例如 $n=23$，我们得到真命题

如 23 是素数，则 24，25，26，27 都不是素数。

（因为前提“如 23 是素数”和结论“则 24，25，26，27 都不是素数”都为真）。某些 n 的值使此条件命题为真（如 $n=23$，$n=4$，$n=47$），但其他的值则使之为假（如 $n=2$，$n=101$）。重要的是我们找到一个值能使条件命题

如 n 是素数，则 $n+1$，$n+2$，$n+3$，$n+4$ 都不是素数

为真，于是存在量词语句

对于某些正整数 n，如 n 是素数，则 $n+1$，$n+2$，$n+3$，$n+4$ 都不是素数。

为真。 □

根据定义 1.3.4，如果对个体域中的每个 x，$P(x)$ 为假，则存在量词语句

对于某些 x，$P(x)$

为假。

例 1.3.11

为证明存在量词语句

对于某些实数 x，$\frac{1}{x^2+1}>1$

为假，我们证明，对于每个实数 x，

$$\frac{1}{x^2+1}>1$$

为假。因为当

$$\frac{1}{x^2+1}\leq 1$$

为真时，上式正好为假，所有我们只要证明，对于每个实数 x，

$$\frac{1}{x^2+1}\leq 1$$

为真即可。据此，令 x 为任一实数，由于 $0\leq x^2$，向此不等式的两边都加 1，得到 $1\leq x^2+1$。把式子两边都除以 x^2+1，得

$$\frac{1}{x^2+1}\leq 1$$

因此，此语句对于每个实数 x 都为真。由此，语句

$$\frac{1}{x^2+1}>1$$

对于每个实数 x 都为假。于是我们证明了存在量词语句

对于某些实数 x，$\frac{1}{x^2+1}>1$

为假。 □

在例 1.3.11 中，用证明一个相关的全称量词语句为真的方法，来证明一个存在量词语句为假。下面的定理证实了这个关系，它把逻辑中德·摩根定理广义化了（见例 1.2.11）。

定理 1.3.12 广义的德·摩根定理

如 P 是一个命题函数,(a)和(b)中的每一对命题总有同样的真假值(即同为真或同为假)。

(a) $\overline{\forall x, P(x);}$ $\exists x, \overline{P(x)}$

(b) $\overline{\exists x, P(x);}$ $\forall x, \overline{P(x)}$

证明:我们只证明(a),把(b)的证明留给读者作为习题(习题 50)。

假设命题 $\overline{\forall x, P(x);}$ 为真,则命题 $\forall x$, $P(x)$为假。由定义 1.3.4,当 $P(x)$对于个体域中至少一个 x 其值为假时,命题 $\forall x$, $P(x)$为假。但如对于个体域中至少一个 x,如 $P(x)$的值为假,$\overline{P(x)}$ 为真。仍由定义 1.3.4,当对于个体域中至少一个 x, $\overline{P(x)}$ 为真,则 $\exists x$, $\overline{P(x)}$ 为真。因此,如 $\overline{\forall x, P(x);}$ 为真,命题 $\exists x$, $\overline{P(x)}$ 为真。相似地,如 $\overline{\forall x, P(x);}$ 为假,命题 $\exists x$, $\overline{P(x)}$ 也为假。

因此,(a)中的一对命题永取同样的真假值。 ■

例 1.3.13

令 $P(x)$代表语句

$$\frac{1}{x^2+1} > 1$$

在例 1.3.11 中,我们示出,要证明

对于某些实数 x, $P(x)$

为假,只要证明

对于某些实数 x, $\overline{P(x)}$ (1.3.4)

为真即可。由定理 1.3.12 可证实这种方法是正确的。当证明表达式(1.3.4)为真之后,我们可以得到其否定

$\overline{\text{对于某些实数 } x, \overline{P(x)}}$

为假。故由定理 1.3.12 之(a),有

对于某些实数 x, $\overline{\overline{P(x)}}$

或其等价

对于某些实数 x, $P(x)$

也为假。 □

一个全称量词命题可看成是下面复合命题的广义化

$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots\cdots \wedge P_n$ (1.3.5)

其意义是把上式中的各个命题 $P_1 P_2 \cdots\cdots P_n$ 用一系列 $P(x)$代替,此处的 x 是个体域的一个元素,于是命题(1.3.5)可用

对于每一个 x, $P(x)$ (1.3.6)

代替。命题(1.3.5)为真,当且仅当每个 P_i 为真,$i = 1, \cdots\cdots n$。式(1.3.6)的真假值也同样确定:式(1.3.6)为真,当且仅当对于个体域中的每个 x, $P(x)$为真。

相似地,存在量词语句可看成是下面复合命题的广义化

$P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$ (1.3.7)

其意义是把上式中的各个命题 $P_1P_2\cdots P_n$ 用一系列 $P(x)$ 代替，此处的 x 是个体域的一个元素，于是命题(1.3.7)可用

对于某些 $x, P(x)$

代替。前面的观察解释了为什么定理 1.3.12 广义化了德·摩根定理(例 1.2.11)。回忆根据第一德·摩根定理，有

$\overline{P_1 \vee P_2 \vee \cdots\cdots \vee P_n}$ 和 $\overline{P_1} \wedge \overline{P_2} \wedge \cdots\cdots \wedge \overline{P_n}$

其真假值相同。由定理 1.3.12 之(b)，

$$\overline{P_1} \wedge \overline{P_2} \wedge \cdots \wedge \overline{P_n} \text{ 可用}$$

$$\forall x, \overline{P(x)}$$

代替，而

$$\overline{P_1 \vee P_2 \vee \cdots\cdots \vee P_n}$$

可用

$$\overline{\exists x, P(x)}$$

代替。

例 1.3.14

用文字表示的语句往往有多于一种解释。考虑众所周知的莎士比亚的句子

闪闪发光的不是金的

一个可能的解释是“没有闪闪发光的东西是金的”(即金的东西都不闪闪发光)。然而，这不是莎士比亚的意思。正确的意义是“有些闪闪发光的东西不是金的”。

如令 $P(x)$ 代表命题函数“x 闪闪发光”，$Q(x)$ 代表命题函数“x 是金的”，第一种解释成为

对于所有的 $x, P(x), \to \overline{Q(x)}$， (1.3.8)

而第二种解释成为

对于有些 $x, P(x), \wedge \overline{Q(x)}$。

用例 1.2.12 的结果，可见命题

对于有些 $x, P(x), \wedge \overline{Q(x)}$

和

对于有些 $x, \overline{P(x) \to Q(x)}$

相同。由定理 1.3.12，命题

对于有些 $x, \overline{P(x) \to Q(x)}$

和

$\overline{\text{对于所有的 } x, P(x) \to Q(x)}$

的真假值是相同的。这样，第二种解释的一个等价的表示是

$\overline{\text{对于所有的 } x, P(x) \to Q(x)}$ (1.3.9)

比较语句(1.3.8)和(1.3.9)可见，二义性的产生是由于否定的范围，是仅仅作用于 $Q(x)$(第一种解释)还是作用于整个语句

对于所有的 $x, P(x) \to Q(x)$

(第二种解释)。语句

闪闪发光的不是金的

的正确解释是否定作用于整个语句。

在肯定语句中,“任何”,“所有”,“每个”和“每一个”有相同的意义。在否定语句中,情况不同:

并非所有的 C_1 是 C_2

并非每个 C_1 是 C_2

并非任意一个 C_1 是 C_2

其意义相同,其意义是

有些 C_1 不是 C_2

而　没有任何 C_1 是 C_2

意义是

没有 C_1 是 C_2

其他的例见习题 47,48。 □

我们的下个例子示出,全称量词和存在量词可以在单个语句中混起来使用,也可用来约束多于一个变量。

例 1.3.15

设个体域是实数集合,考虑语句

对于每个 x,存在 y,$x+y=0$

此语句的意义是,对于任一个 x,至少有一个 y(y 可依赖于 x),使 $x+y=0$。我们可以看出,语句

对于每个 x,存在 y,$x+y=0$

为真。对于任何 x,我们可找出至少一个 y,即 $y=-x$,令 $x+y=0$ 为真。 □

设我们把例 1.3.15 语句倒过来,得

存在 y,对于每个 x,$x+y=0$

如果此语句为真,就可能选择某些 y 的值,使语句

对于每个 x,$x+y=0$

为真。然而,对此我们可以找出反例。例如,可以令 $x=1-y$,我们得到假的语句

$1-y+y=0$

因此,语句

存在 y,对于每个 x,$x+y=0$

为假。

例 1.3.16

令 $P(x,y)$表示语句

如 $x^2<y^2$ 则 $x<y$

个体域是实数集合。

语句

对于所有的 x,对于所有的 y,$P(x,y)$

为假。一个反例是 $x=1, y=-2$。此时,我们得到假命题

如 $1^2<(-2)^2$,则 $1<-2$。

语句

对于所有的 x,存在 $y, P(x,y)$

为真。因为对于每个 x,命题

存在 y,如 $x^2<y^2$,则 $x<y$

为真。因为我们令 $y=0$,得出真命题



如 $x^2<0$,则 $x<0$

(前提 $x^2<0$ 为假,故命题为真)。表示至少有一个 y,使命题

如 $x^2<y^2$,则 $x<y$

为真。

语句

对于所有的 y,存在 $x, P(x,y)$

为真。因为对于每个 y,令 $x=|y|+1$,得到真命题

如 $(|y|+1)^2<y^2$,则 $|y|+1<y$

(因为前提为假,命题为真)。表示存在 x,能使命题

如 $x^2<y^2$,则 $x<y$

为真。 □

我们总结一下证明或反证全称量词语句或存在量词语句的方法:

· 要证明全称量词语句

对于所有的 $x, P(x)$

为真,可以证明对个体域中的每一个 x, $P(x)$为真。证明某个特定的 x 能使 $P(x)$为真,并不能证明上述全称量词语句为真。

· 要证明存在量词语句

对于有些 $x, P(x)$

为真,可以在个体域中找出一个 x,使 $P(x)$为真。有一个就够了。

· 要证明全称量词语句

对于所有的 $x, P(x)$

为假,可以在个体域中找出一个 x,使 $P(x)$为假(反例)。

· 要证明存在量词语句

对于有些 $x, P(x)$

为假,可以证明对个体域中的每一个 x, $P(x)$为假。证明某个特定的 x 能使 $P(x)$为假,并不能证明上述存在量词语句为假。

习 题

在习题 1－6 中,说出语句是否命题函数。如是命题函数,给出一个个体域。

*1. $(2n+1)^2$ 是一个奇数。

2. 在 1 和 10 之间选择一个整数。

3. 令 x 为一实数。

*4. 在 1955 年,此电影得到奥斯卡最佳图像奖。

5. $1+3=4$

6. 存在 x 使 $x<y$(x,y 为实数)。

令 $P(n)$ 是条件命题"n 整除 77",把习题 7 – 11 的某个命题用文字写出,并写出其为真或为假。个体域是正整数集合。

*7. $P(11)$　　8. $P(1)$　　9. $P(3)$　　*10. 对于每个 n, $P(n)$

11. 对于某些 n, $P(n)$

令 $T(x,y)$ 是命题函数"x 比 y 高"。个体域是三个学生:Garth,高 5 英尺 11 英寸,Erin,5 英尺 6 英寸,Marty,6 英尺。将习题 12 – 15 的各个命题用文字表示,并求出其真假值。

*12. $\forall x \forall y T(x,y)$

13. $\forall x \exists y T(x,y)$

14. $\exists x \forall y T(x,y)$

*15. $\exists x \exists y T(x,y)$

16. 用符号和文字形式写出习题 12 – 15 各命题的否定。

令 $L(x,y)$ 是命题函数"x 爱 y"。个体域是所有活着的人的集合。将习题 17 – 20 的各个命题用符号形式表示。你认为哪些是真的?

*17. 有些人爱所有的人。

18. 所有的人爱所有的人。

19. 有些人爱有些人。

*20. 所有的人爱有些人。

21. 用符号和文字形式写出习题 17 – 20 各命题的否定。

求出习题 22 – 45 中各语句的真假值。个体域是实数集合。证实你的答案的正确性。

*22. 对于每一个 x, $x^2>x$。

23. 对于有些 x, $x^2>x$。

24. 对于每一个 x,如果 $x>1$,则 $x^2>x$。

*25. 对于有些 x,如果 $x>1$,则 $x^2>x$。

26. 对于每一个 x,如果 $x>1$,则 $x/(x^2+1)<1/3$。

27. 对于有些 x,如果 $x>1$,则 $x/(x^2+1)<1/3$。

*28. 对于每一个 x,对于每一个 y, $x^2<y+1$。

29. 对于每一个 x,对于有些 y, $x^2<y+1$。

30. 对于有些 x,对于每一个 y, $x^2<y+1$。

*31. 对于有些 x,对于有些 y, $x^2<y+1$。

32. 对于有些 y,对于每一个 x, $x^2<y+1$。

33. 对于每一个 y,对于有些 x, $x^2<y+1$。

*34. 对于每一个 x,对于每一个 y, $x^2+y^2=9$。

35. 对于每一个 x,对于有些 y, $x^2+y^2=9$。

36. 对于有些 x,对于每一个 y, $x^2+y^2=9$。

*37. 对于有些 x,对于有些 y, $x^2+y^2=9$。

38. 对于每一个 x,对于每一个 y,$x^2+y^2\geq 0$。

39. 对于每一个 x,对于有些 y,$x^2+y^2\geq 0$。

*40. 对于有些 x,对于每一个 y,$x^2+y^2\geq 0$。

41. 对于有些 x,对于有些 y,$x^2+y^2\geq 0$。

42. 对于每一个 x,对于每一个 y,如果 $x<y$,则 $x^2<y^2$。

*43. 对于每一个 x,对于有些 y,如果 $x<y$,则 $x^2<y^2$。

44. 对于有些 x,对于每一个 y,如果 $x<y$,则 $x^2<y^2$。

45. 对于有些 x,对于有些 y,如果 $x<y$,则 $x^2<y^2$。

46. 写出习题 22-45 各命题的否定。

*47. 下面的命题出现于 Dear Abby 的诗句:"所有男人不欺骗他的妻子"。此语句的确切意义是什么?你认为这命题是真的吗?

48. 经济学家 Robert J·Samuelson 的说法"每个环境问题不是一个悲剧"被引用。此语句的确切意义是什么?重新叙述此语句以澄清其意义。

49. (a)用真值表证明,如 p 和 q 是命题,则 $p\rightarrow q$ 或 $q\rightarrow p$ 之一为真。

(b)令 $P(x)$是命题函数"x 是一个有理数",$Q(x)$是命题函数"x 是一个正数",个体域是全体实数集合。对下面的论题进行讨论,它好象证明了所有的有理数都是正数,或所有的正实数都是有理数。

由(a),

$$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\vee(Q(x)\rightarrow P(x))$$

为真。用文字表示就是:对所有 x,如果 x 是有理数,x 就是正数,或者如 x 是正数,则 x 就是有理数。因此,所有的有理数都是正数,或所有的正实数都是有理数。

50. 证明定理 1.3.12 之(b)。

1.4 证明

一个**数学系统**由**公理**,**定义**和**未定义项**组成。公理是先验地被认为是真的。定义是用已有的内容来建立新的概念。某些项未被明确定义,但被公理隐含地定义。在数学系统中,我们可以导出定理。**定理**是一个被证明为真的命题。一些特殊种类的定理被称为**引理**和**推论**。**引理**是一个定理,其本身的内容不大有用,主要用于证明其他定理。**推论**是可以很快地从另一个定理得出的定理。

论述一个定理为真的过程称为**证明**。逻辑是分析证明的工具。本节中,我们要介绍一些证明的一般方法,并用逻辑来分析正确和不正确的论证。在 1.5 和 1.6 节中,我们讨论归结和数学归纳法,它们都是特定的证明技术。我们由给出一些数学系统的例开始。

例 1.4.1

欧几里德几何提供了一个数学系统的例。其公理有:

·给出两个不同的点,只有一条直线通过它们。

·给出一条直线和其外的一个点,只有一条直线通过此点并平行于给定直线。

名词点和直线是未定义的项,但是由描述它们性质的公理隐含地定义。

定义有:

·如果两个三角形其顶点能一一对应,使对应的边和角都相等,则此两个三角形是全等的。

·如果两个角的和为 180 度,则它们互为补角。 □

例 1.4.2

实数给出另一个数学系统的例。其公理有:

·对于所有的实数 x 和 y, $xy = yx$ 。

·实数有一个子集 $\mathbf{P}$,满足

(a)如 x 和 y 在 $\mathbf{P}$ 中,则 $x + y$ 和 xy 都在 $\mathbf{P}$ 中。

(b)如 x 为一实数,则下列论述之一为真:

x 在 $\mathbf{P}$ 中　　$x = 0$　　$-x$ 在 $\mathbf{P}$ 中

乘运算隐含地在第一个公理中定义,其他描述了乘运算应有的性质。

·上面公理中 $\mathbf{P}$ 的元素称为正实数。

·实数 x 的绝对值 $|x|$ 定义是:如 x 为正, $|x|$ 就是 x ,否则为 0 或 $-x$ 。 □

在欧几里德几何和实数系统中,我们给出一些定理,引理和推论的例子。

例 1.4.3

欧几里德几何中定理的例子是

·如一三角形的两边相等,则其对角相等。

·如一四边形的两个对角线互相等分,则四边形是平行四边形。 □

例 1.4.4

欧几里德几何中推论的例子是

·等边三角形的三内角相等。

此推论可由例 1.4.3 的第一个定理立即得出。 □

例 1.4.5

实数的定理的例子是

·对于每个实数 x, $x \cdot 0 = 0$。

·对于所有的实数 x, y 和 z,如 $x \leq y$,且 $y \leq z$,则 $x \leq z$。 □

例 1.4.6

实数的引理的例子是

如 n 为一正整数,则或者 $n - 1$ 为正,或者 $n - 1 = 0$。

此结果本身并没有多大意义,而是用来证明其他结果。 □

定理的通常形式为:

对于所有的 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$,如 $p(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$,则 $q(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$。

如对于所有的 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$,条件命题

如 $p(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$，则 $q(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$ (1.4.1)

为真，则上面的全称量词语句为真。为证明命题(1.4.1)，我们设 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 是个体域的任意元素。如 $p(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$为假，由定义(1.2.4)，命题(1.4.1)为真；这样，我们只要考虑 $p(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$为真的情况。**直接证明法**是假设 $p(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$为真，然后，使用 $p(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$和其他公理，定义和已经证明的定理，直接地证明 $q(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$为真。

例 1.4.7

我们对下面的陈述给出一个直接证明：定义所有的实数 d,d_1,d_2 和 x，

如 $d=\min(d_1,d_2)$且 $x\le d$，则 $x\le_1$ 且 $x\le d_2$。

证明：我们设 d,d_1,d_2 和 x 是任意实数。由前面的讨论可知，只要假设

$d=\min(d_1,d_2)$且 $x\le d$

为真，并证明

$x\le d_1$ 且 $x\le d_2$

就行了。

由 min 的定义，有 $d\le d_1$ 和 $d\le d_2$。由 $x\le d$ 和 $d\le d_1$，我们由前面的定理(例 1.4.5 的第二定理)可得出 $x\le d_1$。由 $x\le d$ 和 $d\le d_2$，由同一个定理可得 $x\le d_2$。因此，$x\le d_1$ 且 $x\le d_2$。 ■ □

第二个证明的方法是**反证法**。命题(1.4.1)的反证法是假设前提 p 为真且结论 q 为假，使用 p 和 $\bar{q}$ 和其他公理，定义和已经证明的定理，得出一个**矛盾**。此处的矛盾是一个形式如 $r\vee\bar{r}$ 的命题(r 可为任何的命题)。反证法有时称为**间接证明**，因为使用矛盾来证明命题(1.4.1)，是循着一个间接的方法；得出 $r\vee\bar{r}$，来证明命题(1.4.1)为真。

直接证明和间接证明，其前提的不同在于被否定了的结论。它在间接证明中被用作前提，而直接证明中不用它作为前提。

反证法的正确性可由

$p\rightarrow q$ 和 $p\wedge\bar{q}\rightarrow r\wedge\bar{r}$

二式等价看出。等价可由下面的真值表证实。

p	q	r	$p\rightarrow q$	$p\wedge\bar{q}$	$r\vee\bar{r}$	$p\wedge\bar{q}\rightarrow r\wedge\bar{r}$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	F	F	T

例 1.4.8



用反证法证明下面的陈述：

对于所有的实数 x 和 y，如 $x+y\geq 2$，则 $x\geq 1$ 或 $y\geq 1$。

证：设结论为假。于是，$x<1$ 和 $y<1$（回忆析取的否定得到合取：见例 1.2.11，逻辑的德·摩根定律）。由前面的定理，加入这些不等式，可得

$x+y<1+1=2.$

此时，我们就得出了矛盾 $p\vee\overline{p}$，其中，

$p: x+y\geq 2.$

由此我们得出该陈述为真。 ■ □

假设我们得出命题(1.4.1)的一个反证，在其中，像例 1.4.8，得到 $\overline{p}$。实际上，我们证明了

$$\overline{q}\rightarrow\overline{p} \tag{1.4.2}$$

这个反证的特殊情况称为**逆向求证**。

在建立一个证明时，我们必须肯定所使用的论证是**有效的**。本节的后面，我们要给出“有效论证”概念的确切含义，并对它进行较详细的讨论。

考虑下列命题系列

错误或者在模块 17 中，或在模块 81 中。

错误是一个数字错误。

模块 81 没有数字错误。 (1.4.3)

假设这些陈述都是真的，可以得到结论：

错误在模块 17 中。 (1.4.4)

从一系列前提得出结论的方法称为**演绎推理**。给出的命题系列，如语句(1.4.3)，称为**前提**，从这些前提得到的命题，如语句(1.4.4)，称为**结论**。一个(**演绎的**)**论证**包括前提和结论。数学和计算机科学中的许多证明都是演绎论证。

任何论证的形式都是

如 p_1 且 p_2 且…且 p_n，则 q。 (1.4.5)

如结论能从前提导出，也就是，如 p_1 且 p_2 且…且 p_n 为真，则 q 也必为真，就说论证(1.4.5)是有效的。这个讨论导致下面的定义。

定义 1.4.9

一个论证是一系列的命题，写如

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \underline{p_n} \\ \therefore q \end{array}$$

或

$p_1, p_2, \cdots, p_n / \therefore q$

命题 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 称为前提，命题 q 称为结论。如 p_1 和 p_2 和…和 p_n 全为真，则 q 也必为

真，那么论证就是有效的；否则，论证是无效的（或谬误）。

在一个有效的论证中，我们有时说结论从前提导出。注意我们并不是说结论是真的；我们只说，如果你承认前提，你也要承认结论。一个论证有效是在于它的形式，而不是在于它的内容。

例 1.4.10

确定论证

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array}$$

是否有效。

[解 1]我们对所有的命题建立真值表：

p	q	$p \to q$	p	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

可见只要 p 和 $p \to q$ 为真时，结论 q 也为真；因此，论证是有效的。

[解 2]可由不用真值表直接证明，只要前提为真，结论也必为真。

设 p 和 $p \to q$ 为真，则 q 必为真，因为否则 $p \to q$ 将为假。因此，论证有效。 □

例 1.4.11

将论证

如 2 = 3，则我吃我的帽子。

<u>我吃我的帽子。</u>

∴2 = 3

表为符号形式，并确定论证是否有效。

如令

p:2 = 3　　q:我吃我的帽子

则论证可写为

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q} \\ \therefore p \end{array}$$

如论证是有效的，则只要当 $p \to q$ 和 q 都为真，p 必须也为真。假设 $p \to q$ 和 q 都为真，这只当 p 为假和 q 为真时才行。此种情况下，p 不为真；于是论证不是有效的。

□

我们也能由例 1.4.10 的真值表来确定例 1.4.11 中论证的有效性。在表的第三行，两个前提都为真而结论为假，所以论证不是有效的。

习 题

*1. 给出一个欧几里德几何中公理的例(和例 1.4.1 不同)。

2. 给出一个实数系统中公理的例(和例 1.4.2 不同)。

3. 给出一个欧几里德几何中定义的例(和例 1.4.1 不同)。

*4. 给出一个实数系统中定义的例(和例 1.4.2 不同)。

5. 给出一个欧几里德几何中定理的例(和例 1.4.3 不同)。

6. 给出一个实数系统中定理的例(和例 1.4.5 不同)。

*7. 一个直接证明的内容是:如果 x 为一实数,则 $x.0=0$,证实其中的每一步的正确性。已知的定理是:如 a,b,c 是实数,则 $b+0=b$ 和 $a(b+c)=ab+ac$。如果 $a+b=a+c$,则 $b=c$。

证:$x\cdot 0+0=x\cdot 0=x\cdot(0+0)=x\cdot 0+x\cdot 0$;因此,$x\cdot 0=0$。 ■

8. 一个反证的内容是:如果 $xy=0$,则或者 $x=0$,或者 $y=0$。证实其中的每一步的正确性。设已知:如 a,b,c 是实数且 $ab=ac$且 $a\neq 0$,则 $b=c$。

证:设 $xy=0$ 且 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$。由于 $xy=0=x\cdot 0$ 且 $x\neq 0$;$y=0$,这是一个矛盾。 ■

9. 用反证法试证,如果 100 个球放在 9 个盒子中,必有某些盒子包含 12 个或更多的球。

把系统 10-14 的论证写为符号形式,并确定其是否有效。令

p :我努力学习　　q :我得到 A(指课程成绩)　　r :我有钱

*10. 如我努力学习,则我得到 A
我努力学习
―――――――
∴我得到 A

11. 如我努力学习,则我得到 A
如我不有钱,则我没有得到 A
―――――――
∴我有钱

12. 我努力学习当且仅当我有钱
我有钱
―――――――
∴我努力学习

*13. 如我努力学习或者我有钱,则我得到 A
我得到 A
―――――――
∴如我不努力学习,则我有钱

14. 如我努力学习,则我得到 A 或我有钱
我没有得到 A 并且我不有钱
―――――――
∴我不努力学习

在习题 15-19 中,用文字写出给定的论证,并确定论证是否有效。令

p :64K 比完全没有内存好。

q :我们要买更多的内存。

r :我们要买一个新的计算机。

*15. $p \to r$

$\underline{p \to q}$

$\therefore p \to (r \wedge q)$

16. $p \to (r \vee q)$

$\underline{r \to \overline{q}}$

$\therefore p \to r$

17. $p \to r$

$\underline{r \to q}$

$\therefore q$

*18. $\overline{r} \to \overline{p}$

$\underline{r}$

$\therefore p$

19. $p \to r$

$r \to q$

$\underline{p}$

$\therefore q$

确定习题 20－24 的论证是否有效。

*20. $p \to q$

$\underline{\overline{p}}$

$\therefore \overline{q}$

21. $p \to q$

$\underline{\overline{q}}$

$\therefore \overline{P}$

22. $\underline{p \wedge \overline{p}}$

$\therefore q$

23. $p \to (q \to r)$

$\underline{q \to (p \to r)}$

$\therefore (p \vee q) \to r$

24. $(p \to q) \wedge (r \to s)$

$\underline{p \vee r}$

$\therefore q \vee s$

25. 试证如果 $p_1, p_2 / \therefore p$ 和 $p, p_3, \cdots, p_n / \therefore c$ 是有效论证，
那么，论证 $p_1, p_2, \cdots, p_n / \therefore c$ 也是有效的。

*26. 讨论下面的论证。

软盘存储器比没有存储器好。

没有存储器比硬盘存储器好。

∴软盘存储器比硬盘存储器好。

*1.5 归结证明

在本节中，我们把 $a \wedge b$ 写为 ab 。

归结是一种由 J.A. 罗宾逊在 1965 年提出的证明技术（见[Robinson]），它依赖于一个单一的规则

$$\text{如 } p \vee q \text{ 和 } \overline{p} \vee r \text{ 都为真，则 } q \vee r \text{ 为真。} \quad (1.5.1)$$

规则(1.5.1)可由写出真值表证明(见习题 1)。因为依赖于这个单一的，简单的规则，它是许多进行推理和证明定理的计算机程序的基础。

在一个归结证明中，前提和结论写为**子句**，一个子句由被析取分隔的项组成，此处的项

* 本节可忽略，不失连续性。

是一个变量或者一个变量的否定。

例 1.5.1

表达式

$$a \vee b \vee \bar{c} \vee d$$

是一个子句，因为其各项 $a, b, \bar{c}, d$ 被析取分隔，且每项都是一个变量或者一个变量的否定。 □

例 1.5.2 表达式

$$xy \vee w \vee \bar{z}$$

不是一个子句，虽然各项都被析取分隔，但项 xy 由两个变量组成，不是单一的变量。 □

例 1.5.3

表达式

$$p \rightarrow q$$

不是一个子句，因为项被 $\rightarrow$ 分隔。每项都是一个变量。 □

一个直接归结证明，其进行是反复地使用规则(1.5.1) 于一对语句，以得出一个新语句，直到得出所需的结论。在使用规则(1.5.1) 时，p 必须是单个变量，但 q 和 r 可以是表达式。注意当规则(1.5.1) 应用于子句时，结果 $q \vee r$ 是一个子句(由于 q $\vee$ r 每一个都由被析取分隔的项组成，每项是一个变量或变量的否定，$q \vee r$ 也由被析取分隔的项组成，每项是一个变量或变量的否定)。

例 1.5.4

用归结进行下面的论证

1. $a \vee b$
2. $\bar{a} \vee c$
3. $\bar{c} \vee d$

$\therefore\ b \vee d$

把规则(1.5.1) 用于表达式 1 和 2，得到

4. $b \vee c$

把规则(1.5.1) 用于表达式 3 和 4，得到

5. $b \vee d$

即所需的结论。由给出的前提 1，2，和 3，我们证明了结论 $b \vee d$。 □

规则(1.5.1) 的特殊情况是

如 $p \vee q$ 和 $\bar{p}$ 为真，则 q 为真。 (1.5.2)

如 p 和 $\bar{p} \vee r$ 为真，则 r 为真。

例 1.5.5

用归结进行下面的论证

1. a

2. $\bar{a} \vee c$

3. $\bar{c} \vee d$

$\therefore d$

把规则(1.5.1) 用于表达式 1 和 2,得到

4. c

把规则(1.5.1) 用于表达式 3 和 4,得到

5. d

即所需的结论。由给出的前提 1, 2, 和 3,我们证明了结论 d。 □

如前提不是一个子句,它必须用等价的表达式代替,此表达式或者是一个子句,或者是几个子句的合取。例如,设一个前提是 $\overline{a \vee b}$,由于否定范围多于一个变量,我们用德 . 摩根第一定律(见例 1.2.11)

$$\overline{a \vee b} \equiv \bar{a}\bar{b}, \qquad \overline{ab} \equiv \bar{a} \vee \bar{b} \tag{1.5.3}$$

来得到一个等价的表达式,其否定符号的范围只是一个变量

$$\overline{a \vee b} \equiv \bar{a}\bar{b},$$

于是我们把原来的前提 $\overline{a \vee b}$ 用两个前提 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 的合取来代替。回忆两个分离的前提 h_1和 h_2的合取等价于 h_1h_2(见定义 1.4.9 及其前面的讨论),可知这代替是正确的。不断地应用德·摩根律可以使否定只作用于一个变量之上。

一个表达式,其各项都由析取来分隔,且各项都由若干变量的合取组成,可以用一个由若干子句的析取组成的等价的表达式代替,使用下面的等价式

$$a \vee bc \equiv (a \vee b)(a \vee c) \tag{1.5.4}$$

此种情况下,可以把单一的前提 $a \vee bc$ 用两个前提 $a \vee b$ 和 $a \vee c$ 代替。使用第一德 . 摩根律(1.5.3)再使用其等价式(1.5.4),我们可得等价的前提,其中的每一个都是一个子句。

例 1.5.6

用归结进行下面的论证

1. $a \vee \bar{b}c$

2. $\overline{a \vee d}$

$\therefore \bar{b}$

把式(1.5.4)用于表达式 1,把前提 1 用下面两个前提代替

$a \vee \bar{b}$

$a \vee c$

使用德 . 摩根第一定律(1.5.3),用下面两个前提代替前提 2

$\bar{a}$

$\bar{d}$

论证成为

1. $a \vee \bar{b}$

2. $a \vee c$

3. $\overline{a}$

4. $\overline{d}$

$\therefore \overline{b}$

把规则(1.5.1)用于表达式 1 和 3,立刻得出结论

$\overline{b}$ □

在自动推理系统中,联合使用归结证明和反证法。我们把结论的否定写为子句并将它加入前提中,然后重复地使用规则(1.5.1),直到得出一个矛盾。

例 1.5.7

用归结和反证法来重证例 1.5.4。

我们首先把结论否定并使用德·摩根第一定律(1.5.3)得出

$\overline{\overline{b} \vee \overline{d}} = \overline{\overline{bd}}$

然后把和 $\overline{b}$ 和 $\overline{d}$ 加入到前提中,得到

1. $a \vee b$
2. $\overline{a} \vee c$
3. $\overline{c} \vee d$
4. $\overline{b}$
5. $\overline{d}$

把规则(1.5.1)用于表达式 1 和 2,得出

6. $b \vee c$

把规则(1.5.1)用于表达式 3 和 6,得出

7. $b \vee d$

把规则(1.5.1)用于表达式 4 和 7,得出

8. d

联合 5 和 8 就得到一个矛盾,于是证明完成。 □

可以看出,归结是正确的且反演是完全的。归结正确其意义是从不相容的子句集合(即一些子句,它们不能全为真)只能得出一个矛盾。反演是完全的,其意义是如果一个子句的集合是不相容的,归结必能够得出一个矛盾。这样,如果从一系列前提可得出一个结论,则由结论的否定和给定的前提,用归结方法一定可以得出一个矛盾。不幸地,归结不能告诉我们,为了导出一个矛盾,应该按什么次序来把子句进行联合。自动化推理系统的一个关键的挑战就是对搜索子句的联合次序进行引导。归结和自动推理的文献见[Gallier; Genesereth; and Wos]。

习 题

*1. 写出真值表来证明规则(1.5.1)。

用归结来证明习题 2-6 的结论。提示:在习题 5 和 6 中,把 or 和 and 用只含→和↔的等价式代替。

*2. $\overline{p} \vee q \vee r$

$\overline{q}$

$\overline{r}$

$\therefore \overline{p}$

3. $\overline{p} \vee r$

$\overline{r} \vee q$

p

$\therefore q$

4. $\overline{p} \vee t$

$\overline{q} \vee s$

$\overline{r} \vee st$

$p \vee q \vee r \vee u$

$\therefore s \vee t \vee u$

5. $p \rightarrow q$

$p \vee q$

$\therefore q$

6. $p \leftrightarrow r$

r

$\therefore p$

*7. 用归结和反证法来重新证明习题 2－6。

8. 用归结和反证法来重新证明例 1.5.6。

1.6 数学归纳法

设有一系列的方块，名为 1,2,…位于一个(无限)长的桌子上(见图 1.6.1)，其中某些方块用“X.”标志(图 1.6.1 中所有可见的方块都是标志了的)。假设

第一个方块已被标志。 (1.6.1)

如所有在第($n+1$)个方块之前的都已被标志，则第($n+1$)个方块也被标志。 (1.6.2)

我们将示出，逐个研究方块，由假设(1.6.1)和(1.6.2)，可以导出，每个方块都是被标志了的。

假设(1.6.1)明确地说，方块 1 已被标志。考虑方块 2，所有在它之前的方块，即方块 1，已被标志，这样，根据假设(1.6.2)，方块 2 也是被标志了的。考虑方块 3，所有在它之前的方块，即方块 1 和 2，已被标志，这样，根据假设(1.6.2)，方块 3 也是被标志了的。用此法可以证明，每一个方块都是被标志了的。例如，我们已经证实方块 1－5 已被标志，如图 1.6.1 所示，为了证实不在图中的方块 6 也被标志，注意到所有在它之前的方块都已被标志，于是根据假设(1.6.2)，方块 6 也是被标志了的。

上面用例说明了**数学归纳法**。为了示出如何更深入地应用数学归纳法，令 S_n 表示前 n 个正整数的和

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \tag{1.6.3}$$

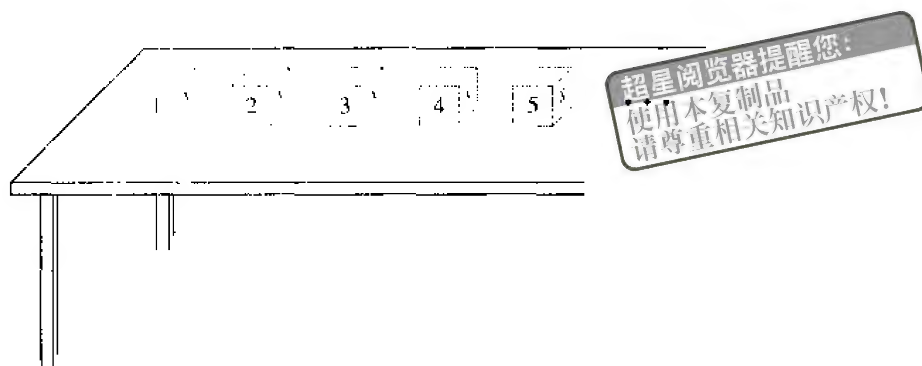


图 1.6.1　桌上的数字块

假设有人宣称

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad n = 1,2,\cdots \tag{1.6.4}$$

即下面一系列的式子正确：

$$S_1 = \frac{1(2)}{2} = 1$$

$$S_2 = \frac{2(3)}{2} = 3$$

$$S_3 = \frac{3(4)}{2} = 6$$

$$\vdots$$

设每个为真的方程后面放一个"×"符号来标志(见图 1.6.2)。由于第一个方程为真，它是被标志的，现在设我们可以证明如某一个特定方程，例如第$(n+1)$个方程之前的所有方程都是被标志了的，则第$(n+1)$个方程也是被标志的。然后，和方块的例一样，所有的方程都是被标志的；即所有的方程为真，公式(1.6.4)得证。

$$S_1 = \frac{1(2)}{2} \qquad \times$$

$$S_2 = \frac{2(3)}{2} \qquad \times$$

$$S_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \times$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \times$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2} \qquad ?$$

图 1.6.2　一个陈述序列，为真的陈用×标志

我们必须证明，如果方程$(n+1)$之前的所有方程都为真，则第$(n+1)$个方程也为真。现在设方程$(n+1)$之前的所有方程都为真，特别是，第 n 个方程为真：

$$S_n = n(n+1)/2 \tag{1.6.5}$$

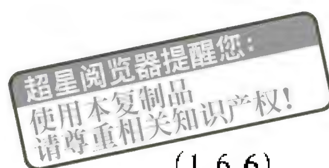
为真，我们要证明第$(n+1)$个方程

$$S_{n+1} = (n+1)(n+2)/2$$

为真。根据定义 1.6.3，

$$S_{n+1} = 1+2+3+\cdots+n+(n+1)。$$

注意 S_n 是 S_{n+1}的一部分，由此



$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1+1+2+3+\cdots+n+(n+1) \\ &= S_n + (n+1) \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

由方程(1.6.5)和(1.6.6)，有

$$S_{n+1} = S_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

我们用数学归纳法的证明由两部分组成，第一是，我们证明对应于 $n=1$ 的陈述为真，第二，假设陈述 $1,2,\cdots,n$ 都为真，然后证明第$(n+1)$个陈述也为真。在证明第$(n+1)$个陈述也为真时，允许应用陈述 $1,2,\cdots,n$；构造一个数学归纳法证明的关键是把陈述 $1,2,\cdots,n$ 和 $n+1$ 联系起来。

我们下面形式地叙述数学归纳法：

数学归纳法原理

设对于每个正整数 n，我们有一个陈述 $S(n)$，其值或为真或为假。假设

$S(1)$为真； (1.6.7)

如对于所有的 $i < n+1$，$S(i)$为真，$S(n+1)$也为真。 (1.6.8)

则对于所有正数 n，$S(n)$为真。

条件(1.6.7)有时称为**基本步骤**，而条件(1.6.8)有时称为**归纳步骤**。此后，本书中“归纳”的意思就是“数学归纳法”。

这里，我们用另一个例子来说明数学归纳法：

例 1.6.1

用数学归纳法证明

对于 $n = 1,2,\cdots$ $\quad n! \geq 2^{n-1}$ (1.6.9)

基本步骤：[条件(1.6.7)]我们必须证明 $n=1$，式(1.6.9)为真。这容易完成，因为

$$1! = 1 \geq 1 = 2^1 - 1。$$

归纳步骤：[条件(1.6.8)]我们必须证明，如果对于 $i = 1,2\cdots,n$，有 $i! \geq 2^{i-1}$，则有

$$(n+1)! \geq 2^n \tag{1.6.10}$$

设对于 $i = 1,\cdots n$，有 $i! \geq 2^{i-1}$，那么，特别地，对于 $i=n$，我们有

$$n! \geq 2^{n-1} \tag{1.6.11}$$

我们可以把式(1.6.10)和(1.6.11)联系起来，看到

$$(n+1)! = (n+1)(n!)$$

现在有

$$\begin{aligned} (n+1)! &= (n+1)(n!) \\ &\geq (n+1)^{2n-1} \quad \text{由式(1.6.11)} \end{aligned}$$

$$\geq 2 \cdot 2^{n-1} \qquad \text{由 } n+1 \geq 2$$
$$= 2^n$$

因此,式(1.6.10)为真。我们完成了归纳步骤。

由于基本步骤和归纳步骤都已证明,数学归纳法告诉我们,对每个正整数 n ,式(1.6.9)为真。 □

为证实条件(1.6.8),我们设对于所有的 $i < n+1$ 时 $S(i)$ 为真,然后证明 $S(n+1)$ 为真。这样的数学归纳法的形式是**数学归纳法的强形式**。经常像前例的情况那样,我们可以仅由 $S(n)$ 导出 $S(n+1)$,确实,归纳步骤经常陈述为:

如果 $S(n)$ 为真,则 $S(n+1)$ 为真。

在这两种形式中,基本步骤是不变的。可以看出(见习题 45)这两种数学归纳法的形式是逻辑等价的。

如果我们要证实陈述

$S(n_0), S(n_0+1) \cdots$

当 $n_0 \neq 1$ 时为真,我们必须把基本步骤改为

$S(n_0)$为真。

归纳步骤不变。

例 1.6.2 几何和

用归纳法证明如果 $r \neq 1$,对于 $n = 0, 1, \cdots$

$$a + ar^1 + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1} \tag{1.6.12}$$

左边的和称为**几何和**,在一个几何和中,相邻项的比($ar^{i+1}/ar^i = r$)是常数。

基本步骤:在此情况下基本步骤是当 $n = 0$ 时,

$$a = \frac{a(r^1 - 1)}{r - 1}$$

该式为真。

归纳步骤:设对于 n 陈述式(1.6.12)为真。现在

$$\begin{aligned} a + ar^1 + ar^2 + \cdots + ar^n + ar^{n+1} &= \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1} + ar^{n+1} \\ &= \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1} + \frac{ar^{n+1}(r - 1)}{r - 1} \\ &= \frac{a(r^{n+2} - 1)}{r - 1} \end{aligned}$$

由于改进的基本步骤和归纳步骤已被证明,数学归纳法告诉我们,对于 $n = 0, 1, \cdots$,式(1.6.12)为真。 □

作为一个几何和应用的例,如果我们在式(1.6.12)中令 $a = 1$ 和 $r = 2$,我们得到公式

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1。$$

读者一定注意到,为了证明上面的式子,必须事前给出正确的公式,一个合理的问题是:怎样知道这公式呢?对于这个问题有许多回答。得出公式的一个方法是对于小的值进行试探,以发现一个模式。例如考虑和 $1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$,下面的表给出当 $n = 1, 2, 3, 4$ 时此

和的值。

n	$1+3+\cdots+(2n-1)$
1	1
2	4
3	9
4	16

由于第二列由平方组成,我们可以推测

$$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2 \qquad n \text{ 为正整数。}$$

可以用数学归纳法对推测进行修正并证明所得公式(见习题1)。

我们最后的两个例子示出,归纳不限于证明和的公式和证明不等式。

例 1.6.3

用归纳法证明 5^n-1 能被4整除对于 $n=1,2,\cdots\cdots$。

基本步骤:如 $n=1,5^n-1=5^1-1=4$,它能被4整除。

归纳步骤:设 5^n-1 可被4整除。我们必须证明 $5^{n+1}-1$ 可被4整除。为了把 n 和 $n+1$ 时的情况联系起来,写出

$5^{n+1}-1=5\cdot5^n-1=(5^n-1)+4\cdot5^n$ 由假设,5^n-1 可被4整除,又由于 $4\cdot5^n$ 可被4整除,式子

$$(5^n-1)+4.5^n=5^{n+1}-1$$

能被4整除。由于基本步骤和归纳步骤已被证明,数学归纳法告许我们,对于 $n=1,2\cdots,5^n-1$ 能被4整除。 □

例 1.6.4 铺瓦问题

一个直角三正方形,以后将简称为三正方形,是一个由三个正方形组成的对象,如图1.6.3所示。三正方形是多正方形的一种。由于多正方形是由所罗门 .W. 歌伦布于1954年提出(见[Golomb,1954]),它们在娱乐数学中是一个心爱的题目。一个度数为 s 的多正方形由 s 个正方形组成,并在边处连接起来。一个三正方形是度数为3的多正方形。三个正方形排成一行是度数为3的多正方形的唯一的另外一种形式(还没有人找出确定度数为 s 的多正方形的个数的简单公式)。有许多正方形有关的问题(见[Martin])。

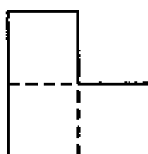
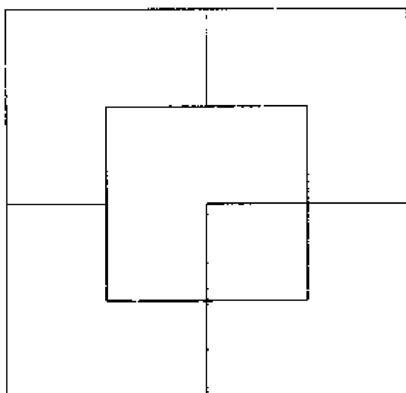


图 1.6.3 一个正方形

我们给出哥伦布对下列问题的归纳法证明(见[Golomb,1954]):如果我们从 $n\times n$(n 为2的幂)正方形的板中去掉一个正方形,则余下的图形可用三正方形来铺成(见图1.6.4)。此处的一个图形由三正方形"铺成"的意义是,用三正方形正好覆盖全部的图形,每个三正方

形不能有重叠，也不许超出图形之外。我们把缺少一个正方形的板称为一个缺方板，把此问题称为铺瓦问题。


图 1.6.4 用三正方形铺设一个 4×4 缺方板

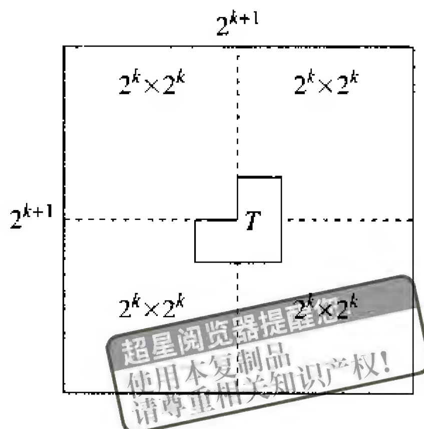


图1.6.5 由数学归纳$2^{k+1}\times2^{k+1}$的缺方板可用三正方形铺成

现在我们对于 k 进行归纳，来证明可以把 $2^k\times2^k$ 的缺方板用三正方形铺成。

基本步骤：如 $k=1$，2×2 缺方板本身就是一个三正方形，因此可由三正方形铺成。

归纳步骤：设我们可以把 $2^k\times2^k$ 的缺方板用三正方形铺成，证明 $2^{k+1}\times2^{k+1}$的缺方板也能用三正方形铺成。

考虑一个 $2^{k+1}\times2^{k+1}$的板，把它分为四个 $2^k\times2^k$ 的板，如图 1.6.5 所示。旋转此板，使缺少的正方形在左上的四分之一中。由归纳的假设，此左上的 $2^k\times2^k$ 缺方板可由三正方形铺成。把一个三正方形 T 放在中间，如图 1.6.5 所示，这样该三正方形的每一个正方形正好分别位于另外三个四分之一(都是 $2^k\times2^k$ 板)中。如果我们把中间的三正方形考虑作缺失的，则另外三个四分之一都是 $2^k\times2^k$ 的缺方板。由归纳假设，它们的铺瓦问题都可解决。于是 $2^{k+1}\times2^{k+1}$的缺方板可由三正方形铺成，$k=1,2,\cdots$。

如果我们能解决 $n\times n$ 板的铺瓦问题，n 不一定是 2 的幂，那么正方形的个数 n^2-1 必能被 3 整除。[Chu]示出，其逆为真，但 n 为 5 时除外。更准确地说，如 $n\neq5$，任何 $n\times n$ 的缺方板可用三正方形铺成的充要条件是：3 整除 n^2-1。[某些 5×5 缺方板的铺瓦问题可以解决，但某些不能。(见习题 32 和 33)]

习 题

在习题 1－11 中，用归纳法证明对所有正整数 n，给出的方程为真。

*1. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

2. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=n(n+1)(n+2)/3$

3. $1(1!)+2(2!)+\cdots+n(n!)=(n+1)!-1$

*4. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

5. $1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}n(n+1)/2$

6. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$

*7. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

8. $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n+2)}$

9. $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}$

*★10. $\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\cos[(x/2)(n+1)]\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}$

如 $\sin(x/2)\neq 0$。(本题超过平均难度)

★11. $1\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\cdots+n\sin nx=\frac{\sin[(n+1)x]}{4\sin^2(x/2)}-\frac{(n+1)\cos(\frac{2n+1}{2}x)}{2\sin(x/2)}$

如 $\sin(x/2)\neq 0$。

在习题 12 – 17 中,用归纳法证明不等式。

*12. $\frac{1}{2n}\le\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}$, $n=1,2,\cdots$

★13. $\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}\le\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $n=1,2,\cdots$

14. $2n+1\ge 2^n$, $n=3,4,\cdots$

*★15. $2^n\ge n^2$, $n=4,5,\cdots$

★16. $(a_1,a_2\cdots a_{2^n})^{\frac{1}{2^n}}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}}{2^n}$

$n=1,2,\cdots$,且 a_i 是正数。

17. $(1+x)^n\le 1+nx$, $x\le -1$ 且 $n=1,2,\cdots$

在习题 18 – 21 中,用归纳法证明给出的陈述。

*18. 对于 $n=1,2,\cdots,7^n-1$ 可被 6 整除。

19. 对于 $n=1,2,\cdots,11^n-6$ 可被 5 整除。

20. 对于 $n=1,2,\cdots,6\cdot 7^n-2\cdot 3^n$ 可被 4 整除。

*★21. 对于 $n=1,2,\cdots,3^n+7^n-2$ 可被 8 整除。

22. 由研究 n 为小值的情况,猜测下面给出的和的公式。

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

然后用归纳法证明你的公式。

*23. 用归纳法证明 n 条直线把平面分为 $(n^2+n+2)/2$ 个区域。设没有两条直线是平行的,且没有三条直线共点。

24. 证明 5 分以上的邮费可仅由 2 分和 5 分的邮票组成。

25. 证明 24 分以上的邮费可仅由 5 分和 7 分的邮票组成。

古代埃及人把分式表为若干分子为一的分式之和。例如 5/6 可表为

$$5/6=1/2+1/3$$

我们说,一个分式 p/q,其中 p,q 都是正整数,写成埃及形式为

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_k}\qquad(1.6.13)$$

其中 $n_1, n_2, \cdots n_k$ 都是正整数，且满足 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$。

*26. 把 5/6 表为两个不同的形式，证明表达式(1.6.13)不是唯一的。

★27. 证明表达式(1.6.13)永远不是唯一的。

28. 由完成下列步骤，对 p 进行归纳来证明，当 $0 < p/q < 1$ 时，分式 p/q 可表为埃及形式。

(a)证明基本步骤($p = 1$)。

(b)设 $0 < p/q < 1$ 和所有的分式 i/q'，此处 $1 \le i < p$ 和 q' 为任意值，可表为埃及形式。选择 $1/n \le p/q$ 时最小的正整数 n，证明

$$n > 1 \quad 和 \quad q/p < 1/(n-1)$$

(c)说明如果 $p/q = 1/n$，证明已完成。

(d)设 $1/n < p/q$，令

$$p_1 = np - q \text{ 和 } q_1 = nq$$

证明

并且 $p_1 < p$

得出结论

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k}$$

其中 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 都不同。

(e)证明 $p_1/q_1 < 1/n$。

(f)证明

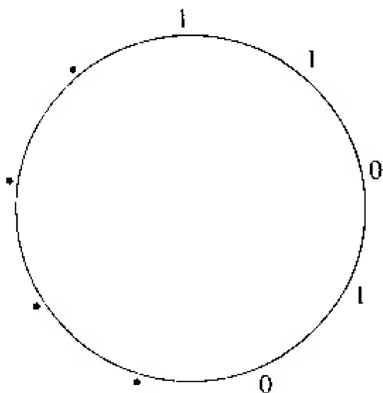
$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_k}$$

其中 $n, n_1, \cdots, n_k$ 都不同。

29. 用习题 28 的方法求出 3/8，5/7，和 13/19 的埃及形式。

*★30. 证明任何分数 p/q，p 和 q 都是正整数，可以写为埃及形式(我们没有假设 $p/q < 1$)。

31. 给定相等个数的 0 和 1，分布在一个圆上(见下图)，证明可能从某些数开始，沿圆周前进而回到起点，使得在圆周上的任一点，可以看到至少和 1 一样多的 0。



32. 对 5×5 的，左上缺少一个正方形的板，给出用三正方形的一个铺瓦方法。

*33. 给出一个 5×5 的，不能用三正方形铺成的缺口板。解释为何你的板不能由三正方

形铺成。

34. 证明$(2i)\times(3j)$的板，i 和 j 都是整数，如没有缺少的正方形，能够由三正方形铺成。

★35. 证明 7×7 的缺方板能够由三正方形铺成。

*★36. 证明任何 $n\times n$ 的缺方板能够由三正方形铺成，如果 $n>5$，n 为奇数，并且 3 能整除 n^2-1。

37. 证明一个 $2^n\times2^n\times2^n$ 缺方的立方体可由三维的七立方体组成。

38. 证明如果一个 $k\times k\times k$ 的缺方的立方体可由三维的七立方体组成，则 $k-1$，$k-2$，$k-4$ 中的一个能被 7 整除。

*39. 假设下面的和的公式是（实际不对）$S_n=(n+2)(n-1)$。

$$2+4+\cdots+2n$$

(a)证明归纳步骤成立，但基本步骤不成立。

*(b)如 S_n' 是一个满足归纳步骤的任一个表达式，S_n' 应具有什么形式？

★40. 下面的论证似乎证明了任意的两个正整数相等，错在何处？

对 n 进行归纳来“证明”，如 a,b 是正整数，且 $n=\max\{a,b\}$，则 $a=b$。

基本步骤：$(n=1)$. 如 a 和 b 是正整数，且 $1=\max\{a,b\}$，则必有 $a=b=1$。

归纳步骤：设 a' 和 b' 是正整数且 $n=\max\{a',b'\}$，则 $a'=b'$。设 a 和 b 是正整数且 $n+1=\max\{a,b\}$，有 $n=\max\{a-1,b-1\}$，由归纳假设，$a-1=b-1$，因此有 $a=b$。

由于基本步骤和归纳步骤已被证明，数学归纳法告诉我们，任意两个正整数相等。

41. 下面的“证明”中错在哪里？

证明对于所有的 $n\geqslant2$，

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}\neq\frac{n^2}{n+1}$$

由矛盾方法，设

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}=\frac{n^2}{n+1} \tag{1.6.14}$$

所以有

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}=\frac{(n+1)^2}{n+2}$$

我们能由归纳法证明式(1.6.14)。特别是，归纳步骤成为

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}\right)+\frac{n+1}{n+2}=\frac{n^2}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}$$

因此有

$$\frac{n^2}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}=\frac{(n+1)^2}{n+2}$$

把方程两边各乘以$(n+1)(n+2)$，得

$$n^2(n+2)+(n+1)^2=(n+1)^3$$

该式可写为

$$n^3+2n^2+n^2+2n+1=n^3+3n^2+3n+1$$

或

$$n^3+3n^2+2n+1=n^3+3n^2+3n+1$$

这是一个矛盾。因此，

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}\neq\frac{n^2}{n+1}$$

得证。

42. 用数学归纳法证明,对于所有 $n\geq2$,

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}<\frac{n^2}{n+1}$$

这个不等式给出习题 41 的正确证明。

★43. 设数学归纳法中归纳步骤的形式是:如 $S(n)$为真,则 $S(n+1)$为真。证明正整数的良序定理。

正整数的良序定理

如 X 是一个正整数的非空集合,X 至少有一个元素。

假设没有小于 1 的正整数,且 n 为一正整数,则 n 和 $n+1$ 之间不存在正整数。

*44. 设正整数的良序定理成立(见习题 43),证明数学归纳法的强形式。

★45. 证明:数学归纳法的强形式和归纳步骤为"如 $S(n)$为真,则 $S(n+1)$为真"的数学归纳法形式是等价的;也就是:设数学归纳法的强形式成立,证明上述形式。然后设数学归纳法的上述形式成立,证明强形式。

46. 证明如 40 个硬币分布在 9 个袋子中,至少两个袋子其中硬币的个数相同。

★47. [Carmony]假设有 $n>1$ 个人,其位置使得每人有唯一的最近的邻人。进一步假设每人有一个饼都掷中最近的邻人。幸存者是没有被饼击中的人。

(a)给出一个例子,说明如 n 为偶数,可能不存在幸存者。

(b)对 n 进行归纳,证明如 n 为奇数,则至少总有一个幸存者。

问题求解之角:数学归纳法

问题

定义

$$H_k=1+1/2+1/3+\cdots+1/k \tag{1}$$

此处 $k\geq1$。证明对于所有 $n\geq0$,

$$H_{2^n}\geq1+\frac{n}{2} \tag{2}$$

问题的分析

经常,一个好的方法是,研究所考虑的表达式的某些具体的例子。我们研究 k 取小值时 H_k 的情况。合于定义的 k 的最小值是 $k=1$,此时,$H_k=1/1=1$,由于第一项和最后项重合,

$$H_1=1。$$

对于 $k=2$,H_k 的最后一项等于 1/2,有

$$H_2=1+1/2$$

相似地,得出

$$H_3=1+1/2+1/3$$

$$H_4=1+1/2+1/3+1/4$$

我们看出,H_1 在 H_2,H_3,H_4 中作为第一项出现,H_2 是 H_3 和 H_4 的前两项,H_3 是 H_4 的前三项。一般地,如 $m\leq k$,H_m 是 H_k 的前 m 项。这结论将会帮助我们,因为证明的归纳步

骤中，要把较低归纳值的情况和较高归纳值的情况联系起来。

一般来说，一个好的策略是，尽量推迟把项合并和进行简化，例如，我们保留 H_4 为四项的和，而不把它写成 $H_4 = 25/12$。由于保留了 H_4 为四项的和，我们才能看出，H_1, H_2, H_3 出现在 H_4 的表达式中。

求得一个解

基本步骤是证明，对于最小的 n 值，证明证明给定的陈述。此处是 $n=0$。对于 $n=0$，我们必须证明的不等式成为

$$H_{2^0} \geq 1 + \frac{0}{2} = 1 \tag{3}$$

我们已经看到 $H_1 = 1$，这样，当 $n=0$ 时，不等式(3)为真；实际上，不等式此时是一个等式（由定义，如 $x=y$ 为真，$x \geq y$ 也为真）。

我们转向归纳步骤。一个好的办法是，写出假设的（此处是归纳值为 n 的情况）

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \tag{4}$$

和要求证的（此处是归纳值为 $n+1$ 的情况）

$$H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2} \tag{5}$$

把定义式代入也是一个好的办法。用方程(1)，我们可写出

$$H_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tag{6}$$

和

$$H_{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

从上式不易清楚看出，$H_{2^{n+1}}$ 的前 2^n 项是 H_{2^n}。我们把最后的方程改写为

$$H_{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots \frac{1}{2^{n+1}} \tag{7}$$

从中可以清楚看出，$H_{2^{n+1}}$ 的前 2^n 项是 H_{2^n}。

为了清楚起见，我们写出了 $1/2^n$ 之后的项。注意其分母增 1，即 $1/2^n$ 项之后是 $1/(2^n+1)$。还要注意该项和最后一项 $1/(2^{n+1})$ 有很大的差别。

由方程(6)和(7)，我们可以把 H_{2^n} 和 $H_{2^{n+1}}$ 联系起来

$$H_{2^{n+1}} = H_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \tag{8}$$

联合(4)和(8)，得到

$$H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \tag{9}$$

此不等式示出，$H_{2^{n+1}}$ 大于或等于

$$1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

但我们的目的是(5)式，要证明 $H_{2^{n+1}}$ 大于或等于 $1+(n+1)/2$。如果我们能证

$$1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$$

就证明了(5)式。一般来说，为证明一个不等式，可以在较大的表达式中用较小的项代替较

大的项，使得所得的表达式等于较小的表达式；或者在较小的表达式中用较大的项代替较小的项，使得所得的表达式等于较大的表达式。此处，我们把和

$$\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

中的各项用较小的项 $1/2^{n+1}$ 代替，得到

$$\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\geq\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

由于式子右边共 2^n 项，都等于 $1/2^{n+1}$，我们可以把此不等式写为

$$\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\geq\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}=2^n\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2} \tag{10}$$

联合(9)和(10)，

$$H_{2^{n+1}}\geq 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{n+1}{2} \tag{11}$$

我们得到所需的结果。于是归纳步骤的证明完成。

形式化的解

形式化的解可以书写如下。

基本步骤：$(n=0)$

$$H_{2^0}=1\geq 1=1+\frac{0}{2}$$

归纳步骤：我们假设(2)，于是

$$H_{2^{n+1}}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$=H_{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\geq 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$=1+\frac{n}{2}+2^n\frac{1}{2^{n+1}}=1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{n+1}{2}$$

问题求解技术的总结

- 研究所考虑的表达式的具体例子，典型地是对于小的变量值。
- 对 n 为较小值时的表达式，研究其在较大 n 值的表达式中是否出现。特别是，归纳步骤中要求把 n 和 $n+1$ 情况联系起来。
- 推迟把项合并和进行简化，以帮助发现表达式之间的关系。
- 完全写出要证明的特定情况，特别是，基本步骤中 n 为最小值的情况，归纳步骤中，归纳值为 n(假设成立)的情况和 $n+1$(要求证)的情况。写出可用于已列出的表达式的公式。
- 要证明一个不等式，可以在较大的表达式中用较小的项代替较大的项，使得所得的表达式等于较小的表达式；或者在较小的表达式中用较大的项代替较小的项，使得所得的表达式等于较大的表达式。

注释

数 H_k 称为调和数，系列

$$1+1/2+1/3+\cdots$$

在微积分中称为调和级数。不等式(2)示出，调和数的增加没有上限，用微积分的术语说，调和级数是发散的。

1.7 小结

通用的离散数学参考书是[Dossey;Graham,1988;Liu,1985;Ross;Tucker],[Knuth,1973,Vols 1 和 3,1981]是许多材料的经典的参考书。

[Baker;Copi;Edgar]是逻辑的入门教材。更深入的内容可在[Davis]找到。[Jacobs]的几何书的第一章是讨论基本逻辑,[Solow]着重于如何构造证明的问题。对于逻辑的历史,见[Kline]。关于计算机程序推理中逻辑的作用,在[Gries]中有讨论。

用多正方形进行铺瓦的问题,是[Martin]书中的题目。

1.8 复习

1.1 节

逻辑

命题

合取:p 与 q,$p \wedge q$

析取:p 或 q,$p \vee q$

否定:非 p,$\overline{p}$

复合命题

真值表

命题 p,q 的不可兼或:p 或 q,但不是二者都为真

1.2 节

条件命题:如 p 则 q;$p \to q$

前提

结论

必要条件

充分条件

$p \to q$ 的逆换式:$q \to p$

双条件命题:p 当且仅当 q,$p \leftrightarrow q$

逻辑等价:$p \equiv Q$

逻辑的德·摩根定律:$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$,$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$

$p \to q$ 的逆反式:$\overline{q} \to \overline{p}$

1.3 节

命题函数

个体域

全称量词

全称量词语句

反例

存在量词

存在量词语句

广义的逻辑的德·摩根定律:

$\overline{\forall a, P(x)}$和$\exists x, \overline{P(x)}$有相同的真假值

$\overline{\exists a, P(x)}$和$\forall x, \overline{P(x)}$有相同的真假值

证明全称量词语句所有 x,$P(x)$为真,要证明对于个体域中的每一个 x,命题 $P(x)$为真。

要证明存在量词语句存在 x,$P(x)$为真,在个体域中找出一个 x,使命题 $P(x)$为真。

证明全称量词语句所有 x,$P(x)$为假,在个体域中找出一个 x,使命题 $P(x)$为假(反例)。

要证明存在量词语句存在 x,$P(x)$为假,要证明对于个体域中的每一个 x,命题 $P(x)$为假。

1.4 节

数学系统

公理

定义

未定义项

定理

证明
引理
直接证明
反证
间接证明
逆向求证
演绎推理
前提(Hypothesis)
前提(Premises)
结论
论证
有效论证
非有效论证

1.5 节

归结证明:使用:如 $p \vee q$ 且 $\bar{p} \vee r$ 都为真,则 $q \vee r$ 为真。
子句:由被析取分隔的项组成,每项都是单个的变量或其否定。

1.6 节

数学归纳法
基本步骤:对于第一个归纳值,证明陈述为真
归纳步骤:设对于小于 n 的所有值为真,证明对 n 也为真。
前 n 个正整数的和的公式:$1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$
几何和 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^n$

$$=\frac{a(r^{n+1}-1)}{r-1}$$

1.9 自测题

1.1 节

1. 如 p,q,和 r 为真,求命题 $(p \vee q) \wedge \overline{((\bar{p} \wedge r) \vee q)}$ 的真假值。
2. 写出命题 $\overline{(p \wedge q)} \vee (p \vee \bar{r})$ 的真值表。
3. 用文字表述命题 $p \wedge (\bar{q} \vee r)$,令
   p:我选饭店管理课
   q:我选娱乐管理课
   r:我选通俗文化课
4. 设 a,b,c 是数,将下面的陈述表为符号形式
   $a<b$ 或($b<c$ 且 $a<c$)

令

   $p: a<b \qquad q: b<c \qquad r: a<c$

1.2 节

5. 把命题“李的离散数学得 A 的必要条件是他努力学习”重新叙述,成为条件命题的形式。
6. 写出习题 5 的命题的逆命题和逆反式。
7. 如 p 为真,q 和 r 为假,求下面命题的真假值。
   $(p \vee q) \rightarrow \bar{r}$
8. 使用习题 4 中的定义,把下面的陈述写为符号形式
   如($a \geq c$ 或 $b<c$),则 $b \geq c$。

1.3 节

9. 下面的陈述是命题吗？解释之。

   该队赢得 1996 年 NBA 的冠军。

10. 习题 9 的陈述是命题函数吗？解释之。

令 $P(n)$代表陈述

   n 和 $n+2$ 是素数

在习题 11,12 中，把陈述用文字表述，并确定其为真或假。

11. 对于所有的正整数 n, $P(n)$。
12. 对于有些正整数 n, $P(n)$。

1.4 节

13. 用反证法证明，如四个队进行一场比赛，则必有两个队至少比赛两场。
14. 区别名词：公理和定义。
15. 一个直接证明和反证法有什么差别？
16. 确定下面的论证是否有效。

$$\begin{array}{l} p \to q \lor r \\ p \lor \overline{q} \\ r \lor q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

1.5 节

17. 找出一个和 $(p \lor q) \to r$ 等价的，由子句的合取组成的表达式。
18. 找出一个和 $(p \lor \overline{q}) \to \overline{r}s$ 等价的，由子句的合取组成的表达式。
19. 用归结证明

$$\begin{array}{l} \overline{p} \lor q \\ \overline{q} \lor \overline{r} \\ p \lor \overline{r} \\ \hline \therefore \overline{r} \end{array}$$

20. 用归结法和反证法重新证明习题 19。

1.6 节

用数学归纳法证明习题 21－24 中的式子对所有的正整数为真。

21. $2+4+\cdots+2n=n(n+1)$
22. $2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=2n(n+1)(2n+1)/3$
23. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$
24. $2^{n+1}<1+(n+1)2^n$